Tensor network approach toward (3+1)-dimensional lattice field theories

Shinichiro Akiyama [a), b)]

[a)] Center for Computational Sciences, University of Tsukuba

[b)] Endowed Chair for Quantum Software, The University of Tokyo

2023.11.16 @ CCS, University of Tsukuba
Tensor Network 2023

(3+1)次元の格子理論をTNで計算する

- ✔ (3+1)次元の場の量子論をTN法で計算したい
- ✔ 特に, 従来のMC計算ではアクセスできない問題設定に取り組みたい
- ✔ 最終的な目標の一つは有限温度・密度のQCD
- ✔ Fermionicな自由度との相性がいい
- ✔ 連続ゲージ自由度には正則化が必要　　Cf. Talk by 日高さん
- ✔ HEP分野に軸足を置いて, TN計算の応用例を見ていく

Cf. Other HEP applications of TN: Talks by 玉岡さん, 桑原さん

A possible load map

Meurice-Sakai-Unmuth–Yockey,Rev.Mod.Phys.94(2022)025005

- ✔ 低次元から高次元へ
- ✔ 比較的単純な自由度を持つモデルから内部自由度に富んだ理論へ
- ✔ 時空間3次元および4次元の場合での具体的なTN計算をKogut sequenceに沿って見ていく

II. LATTICE FIELD THEORY

A. The Kogut sequence: From Ising to QCD

In the early 1970s, QCD appeared to be a strong candidate for a theory of strong interactions involving quarks and gluons. However, the perturbative methods that provided satisfactory ways to handle the electroweak interactions of leptons failed to explain confinement, mass gaps, and chiral symmetry breaking. A nonperturbative definition of QCD was needed. In 1974, Wilson proposed (Wilson, 1974) a lattice formulation of QCD where the SU(3) local symmetry is exact. As this four-dimensional model is fairly difficult to handle numerically, a certain number of research groups started considering simpler lattice models in lower dimensions and then increased symmetry and dimensionality. This led to a sequence of models, sometimes called the “Kogut ladder,” that appears in the reviews of Kogut (1979, 1983) and was later addressed with small modifications by Polyakov (1987) and Itzykson and Drouffe (1991).

The sequence is approximately the following:

(1) $D = 2$ Ising model
(2) $D = 3$ Ising model and its gauge dual
(3) $D = 2$ O(2) spin and Abelian Higgs models
(4) $D = 2$ fermions and the Schwinger model
(5) $D = 3$ and 4U(1) gauge theory
(6) $D = 3$ and 4 non-Abelian gauge theories
(7) $D = 4$ lattice fermions
(8) $D = 4$ QCD

Cf. Talk by 本多さん

高次元系に対するTN法

✔ TRG

Cf. Talks by 本間さん, 上田篤さん, 中山さん, 大木さん, 藤堂さん, 武田さん

・分配関数, 経路積分のTN表現を近似的に縮約する

・3,4次元系で最もよく用いられているTN手法

・連続自由度の正則化が必要

Cf. Talk by 松本さん

✔ TTN, PEPS

Cf. Talks by 奥西さん, 大久保さん, 上田宏さん, 西野さん

・TTN, PEPSで表現された基底状態を最適化していく

・イタリアのグループを中心にTTNによる高次元(4次元を含む)計算が進められている

✔ Gauged Gaussian PEPS (GGPEPS) + Variational MC

・物理系が持つ対称性を尊重してPEPS表現を構成し, その表現形式を活用してVMCする

・連続的ゲージ自由度の正則化が不要

・ドイツを中心としたヨーロッパのグループにより精力的な研究が進められている

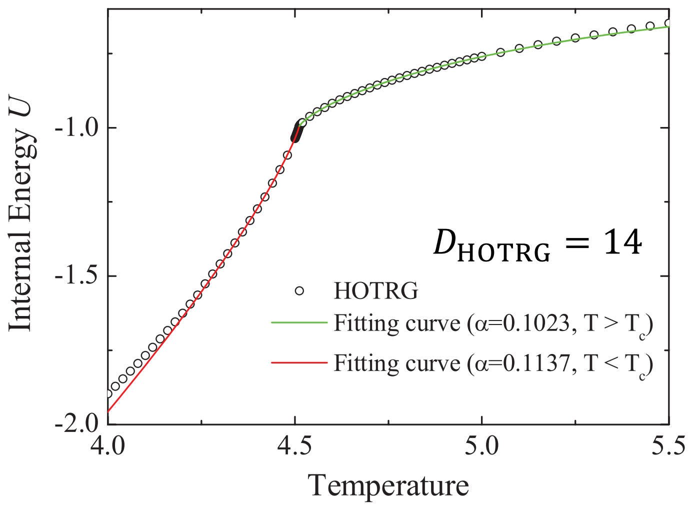
3次元系でのTN計算

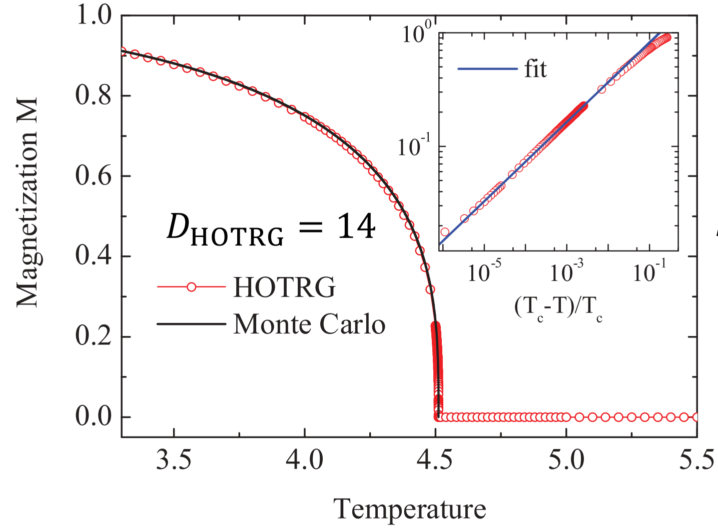
From Ising to SU(2) Yang-Mills

Ising模型 (TRG)

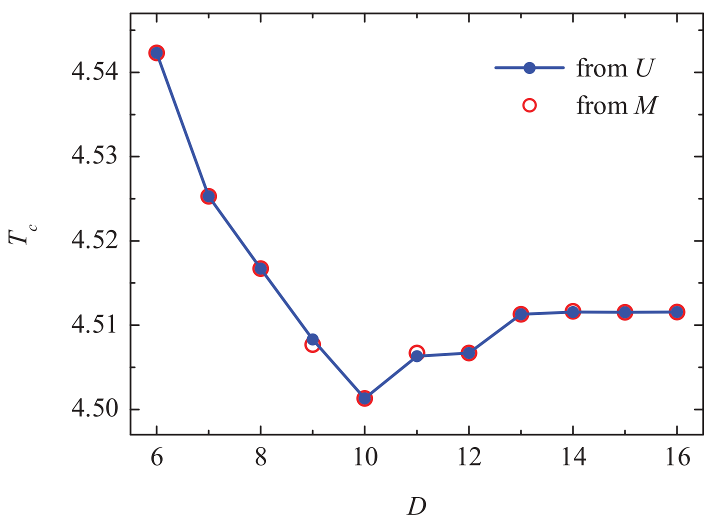
Xie-Chen-Qin-Zhu-Yang-Xiang,PRB86(2012)045139

✔ $D \leq 16$の計で算臨界点が極めて精度良く決定されている





$\beta = 0.3295$



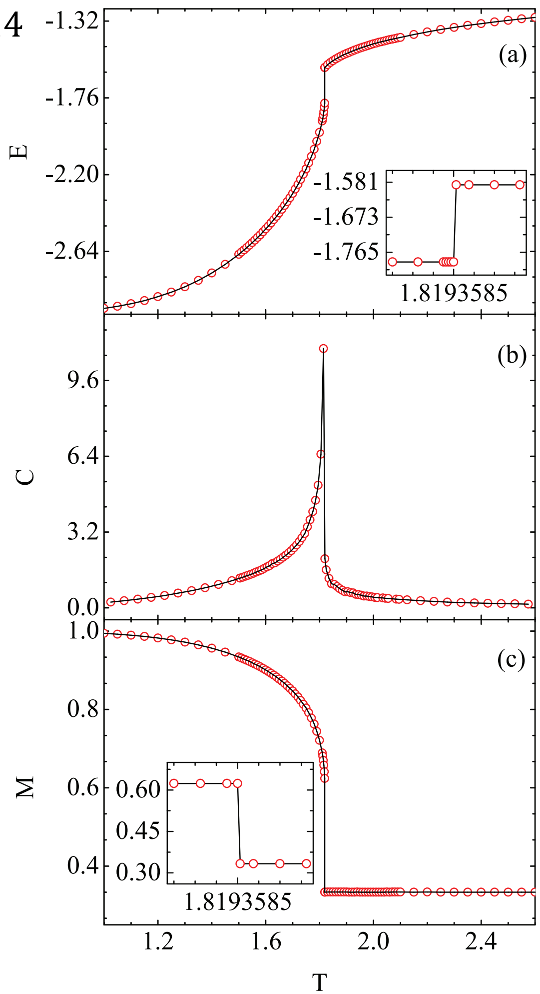
Method	T_c
HOTRG ($D = 16$, from U)	4.511544
HOTRG ($D = 16$, from M)	4.511546
Monte Carlo[37]	4.511523
Monte Carlo[38]	4.511525
Monte Carlo[39]	4.511516
Monte Carlo[35]	4.511528
Series expansion[40]	4.511536
CTMRG[12]	4.5788
TPVA[13]	4.5704
CTMRG[14]	4.5393
TPVA[16]	4.554
Algebraic variation[41]	4.547

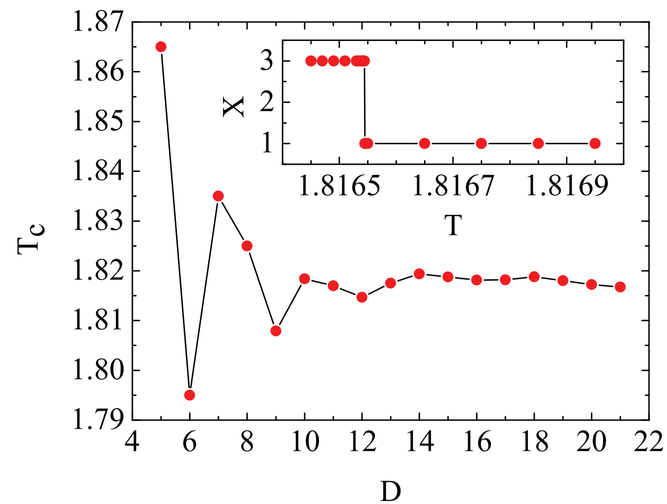
Three-state Potts模型 (TRG)

Wang-Xie-Chen-Normand-Xiang,Chin.Phys.Lett.31(2014)070503, G.Jha,arXiv:2201.01789[hep-lat]

✔ 基底状態の縮退度も測って一次相転移点を決定

$D_{\mathrm{HOTRG}} = 14$





Method	ΔE	T_c
Series expansion (1979) [48]		1.7289(12)
Monte Carlo RG (1979) [14]		1.818
Monte Carlo (1982, $L = 8$) [45]	0.12	1.81
Pair approximation (1982) [45]	0.123	1.879
Monte Carlo (1987, $L = 16$) [46]	0.2222(7)	1.81618(7)
Monte Carlo (1991, $L = 36$) [47]	0.16062(52)	1.816455(35)
Monte Carlo (1997, $L = 36$) [18]	0.1614(3)	1.816316(33)
Monte Carlo (2007, $L = 50$) [5]	0.1643(8)	1.816315(19)
TPVA (2002) [19]	0.228	1.8195
HOTRG (this work)	0.2029	1.8166
	($D = 14$)	($D = 21$)

Triad RG ($D = 70$) $T_c = 1.8175(15)$

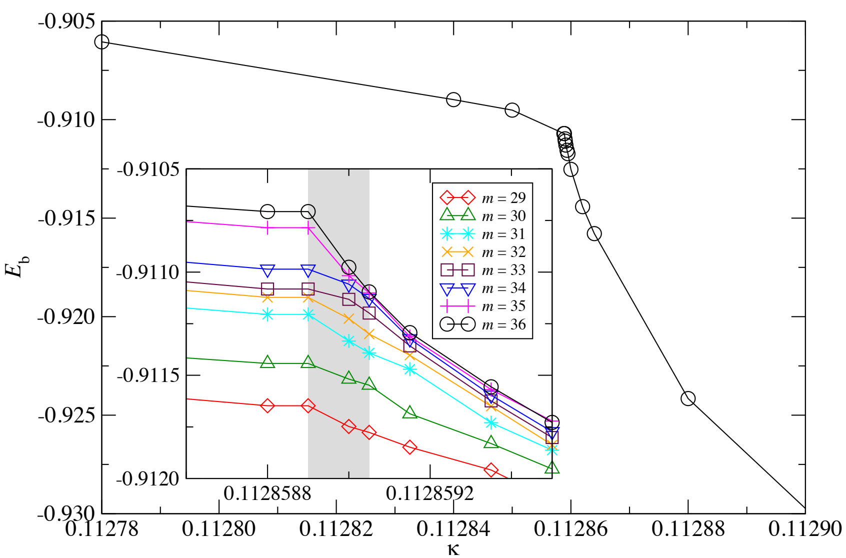
Cf. 有限密度への拡張: Bloch-Lohmayer-Schweiss-Unmuth−Yockey,PoS,LATTICE2021(2022)062

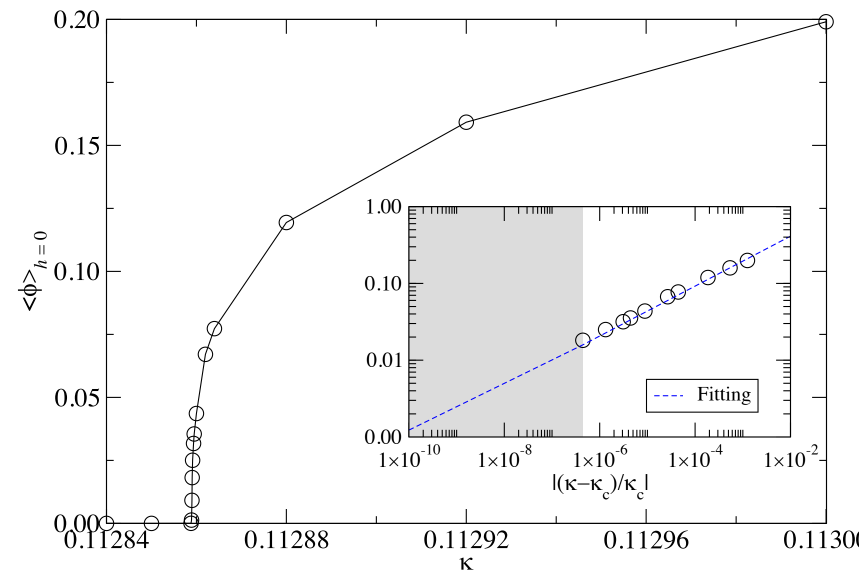
実ϕ^4理論 (TRG)

SA-Kuramashi-Yoshimura, PRD104(2021)034507

- ✔ 結合定数無限大極限でIsing模型になる（Ising模型のfinite-λ generalization）
- ✔ スカラー場はGauss求積法で離散化
- ✔ $\lambda = 40$で内部エネルギーと磁化を計算し, Ising universalityを確認

$D_{\mathrm{ATRG}} = 90$





$\beta = 0.32(2)$

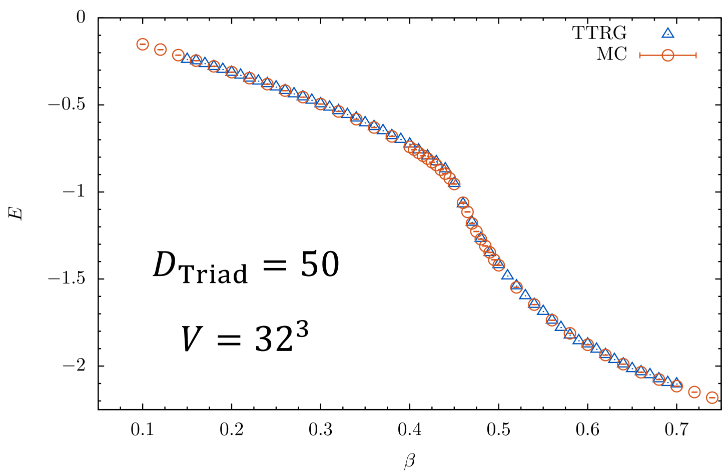
Cf. ATRG: Adachi-Okubo-Todo,PRB102(2020)054432

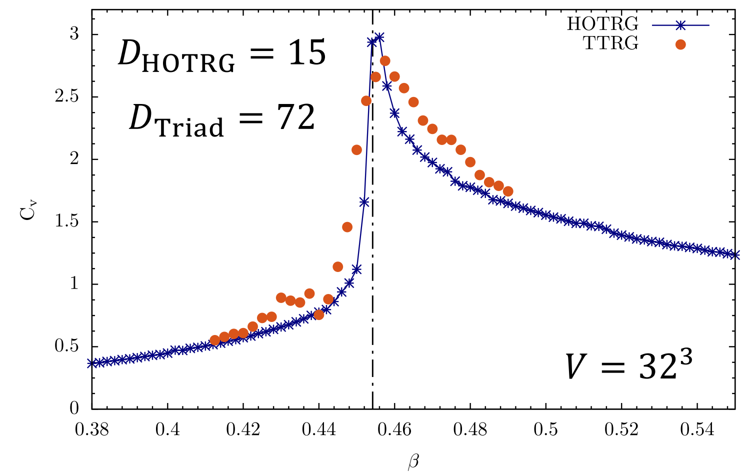
有限密度O(2)模型 (TRG)

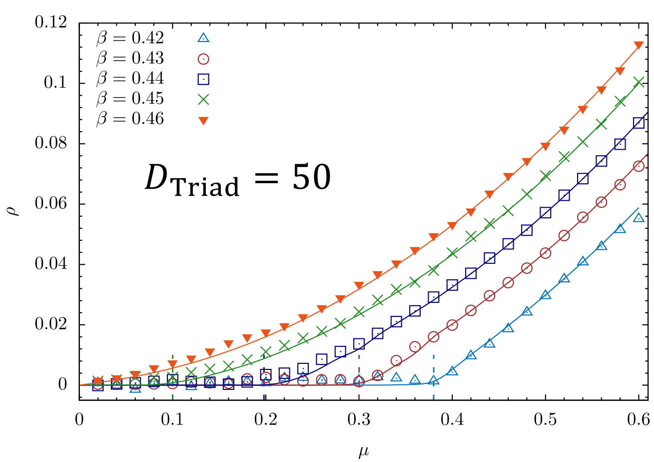
Bloch-G.Jha-Lohmayer-Meister,PRD104(2021)094517

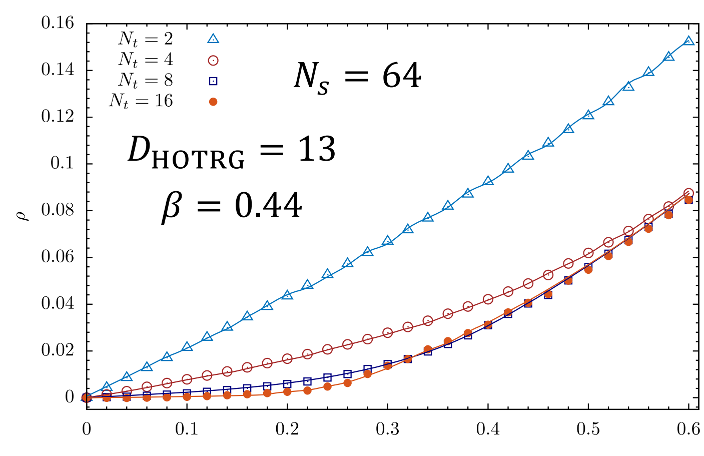
✔ HOTRG, Triad RG, MCの結果を比較. 自由度はキャラクター展開で離散化

✔ $\beta \to \beta_c$でmass gapが小さくなっていく様子を有限密度計算から確認









Cf. Triad RG: Kadoh-Nakayama,arXiv:1912.02414[hep-lat]

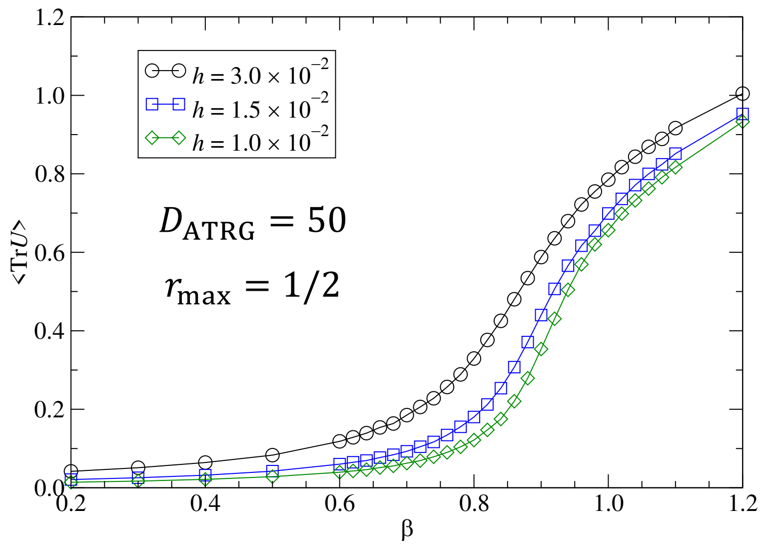
SU(2)プリンシパルカイラル模型 (TRG)

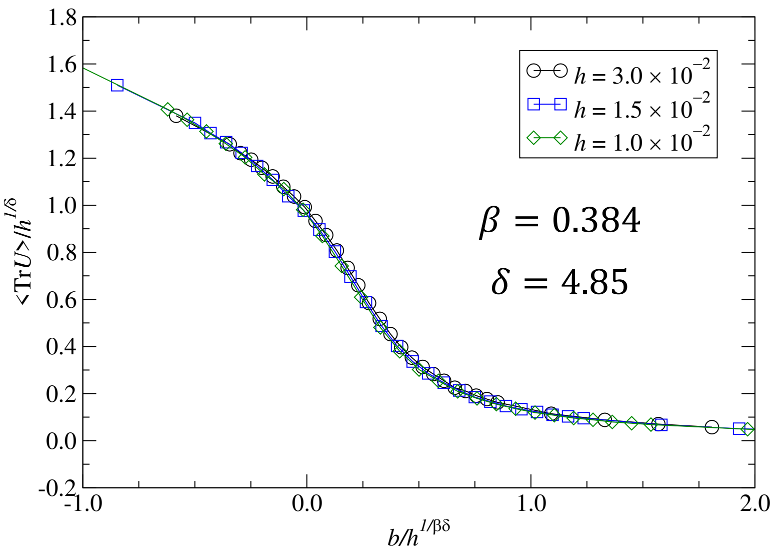
SA-G.Jha-Unmuth–Yockey,Lattice2023, SA-G.Jha-Unmuth–Yockey, in progress

✔ O(4) Heisenberg模型と等価で, massless 2-flavor QCDと同じuniversalityである可能性

✔ 自由度はキャラクター展開で離散化

✔ 磁化に対するスケーリング解析から臨界指数β, δを決定し, MC法とのconsistencyを確認





Cf. Critical exponents by MC simulation: Kanaya-Kana,PRD51(1995)2404

有限温度$\mathbb{Z}_2$純ゲージ理論 (TRG)

Kuramashi-Yoshimura,JHEP08(2019)023

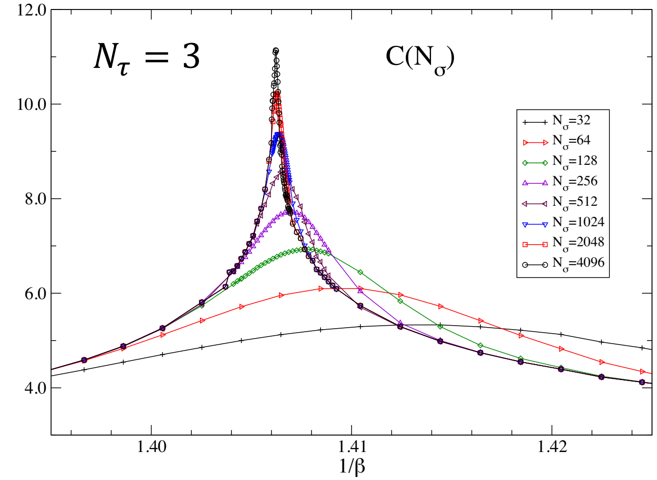
✔ (d+1)次元SU(N), $\mathbb{Z}_n$格子ゲージ理論の有限温度相転移はd次元$\mathbb{Z}_n$スピン模型と同じuniversality classになると予想されている (Svetitsky-Yaffe予想)

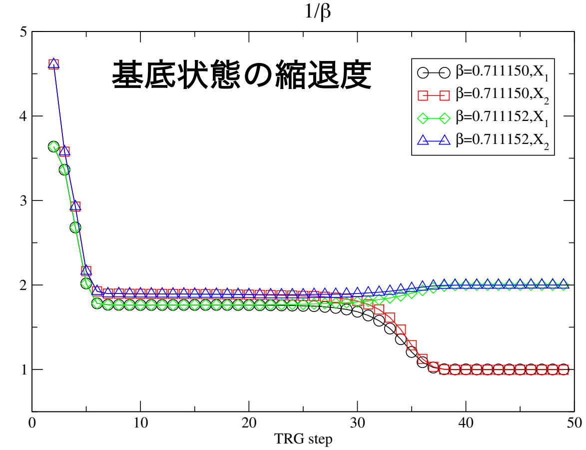
✔ Temporalゲージ固定+温度方向を先に縮約して2次元のTNに落とす

✔ 2次元Ising模型とconsistentな臨界指数α, ν

$D_{\mathrm{LNTRG}} \leq 160$

TRG		This work					
N_τ	N_σ	$\beta_c(\infty)$	ν	B	χ^2/d.o.f.	$\beta_c^{X_1}$	$\beta_c^{X_2}$
2	[512, 4096]	0.656097(1)	1.00(1)	0.116(6)	0.086	0.656094(1)	0.656094(1)
3	[512, 4096]	0.711150(4)	0.99(4)	0.10(3)	0.047	0.711151(1)	0.711151(1)
5	[512, 4096]	0.740730(3)	0.96(5)	0.08(3)	0.012	0.740734(1)	0.740734(1)
MC	Ref. [19]						
N_τ	N_σ	$\beta_c(\infty)$	ν				
2	4, 8, 16, 32	0.65608(5)	1.012(21)				
3	24	0.71102(8)					
5	40	0.74057(3)					



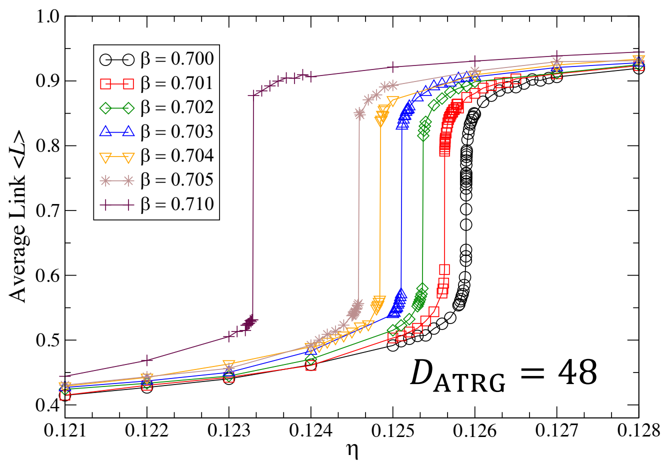


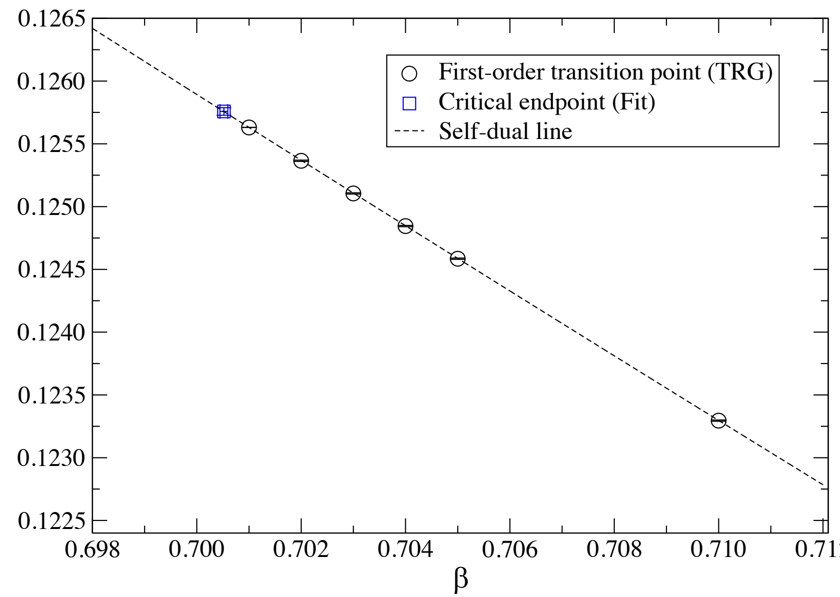
$\mathbb{Z}_2$ゲージ・Higgs模型 (TRG)

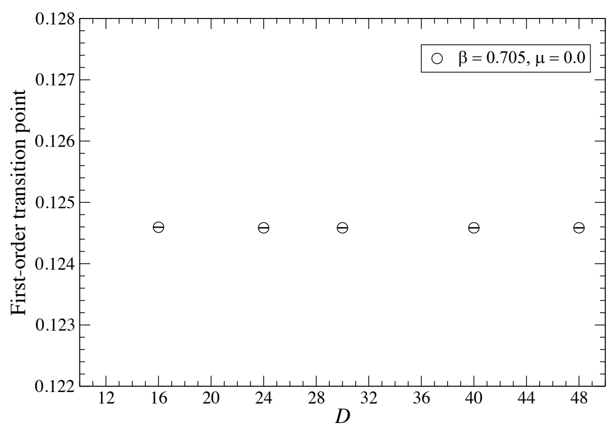
SA-Kuramashi,JHEP05(2022)102

✔ 自己双対性から解析的に分かっているconfinement-Higgs相転移線とconsistent

✔ Unitaryゲージ固定を使った計算. 一次相転移線のボンド次元依存性はとても小さい







MC Somoza+, PRX11(2021)041008	$\beta_c \approx 0.701$
ATRG	$\beta_c = 0.70051(7)$

$\mathbb{Z}_3$純ゲージ理論 (GGPEPS) 1/2

Emonts-Bañuls-Cirac-Zohar,PRD102(2020)074501

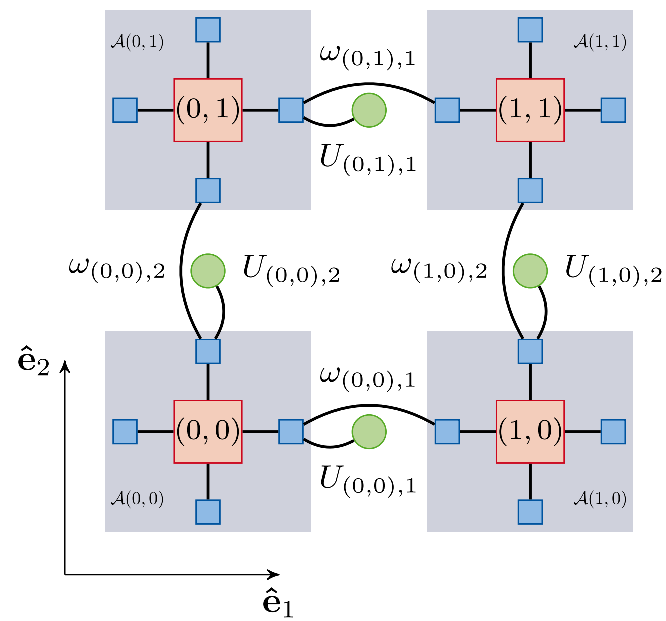
- ✔ あらゆるゲージ場の配位について足し上げた状態 $|\Psi\rangle = \sum_{\mathcal{G}} \Psi(\mathcal{G})|\mathcal{G}\rangle$ を考える
- ✔ Gauged Gaussian PEPSでは仮想フェルミオン自由度を使って$\Psi(\mathcal{G})$を構成していく

$$\Psi(\mathcal{G}) = \left\langle \Omega_{\mathrm{v}} \right| \prod_{\ell} \omega_{\ell} \prod_{\ell} \mathcal{U}_{\mathcal{G}}(\ell) \prod_{x} A(x) \left| \Omega_{\mathrm{v}} \right\rangle$$

- ✔ サイト上の4脚テンソル$A(x)$, リンク上の射影テンソルω_ℓは仮想フェルミオンの生成・消滅演算子で与える.
  特に, $A(x) = \exp\left[T_{ij} a_i^\dagger b_j^\dagger\right]$のGaussianで与える
- ✔ 仮想フェルミオンのモード数が通常のPEPSのボンド次元に対応する
- ✔ 構成要素である$A(x)$やω_ℓをGaussianにしたことで, $|\Psi(\mathcal{G})|^2$の計算が容易になる
- ✔ $|\Psi(\mathcal{G})|^2 \geq 0$なので

$$p(\mathcal{G}) = \frac{|\Psi(\mathcal{G})|^2}{\sum_{\mathcal{G}'} |\Psi(\mathcal{G}')|^2}$$

を使ったMC計算が可能(Sign-problem-free MC)



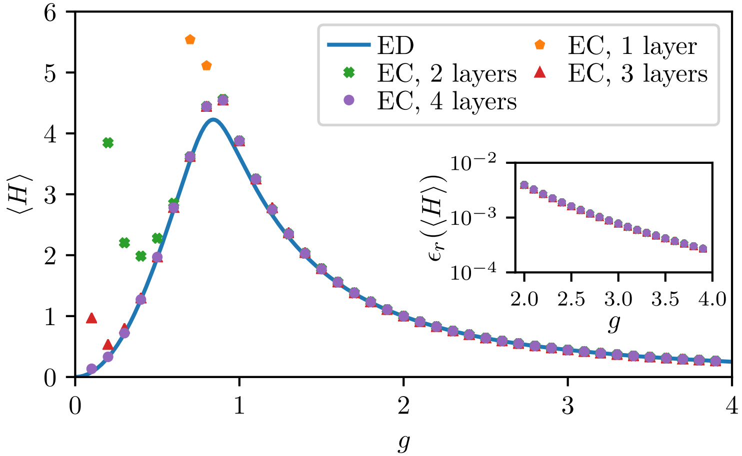
Cf. Zohar-Burrello,New.J.Phys.18(2016)043008, Zohar-Cirac,PRD97(2018)034510

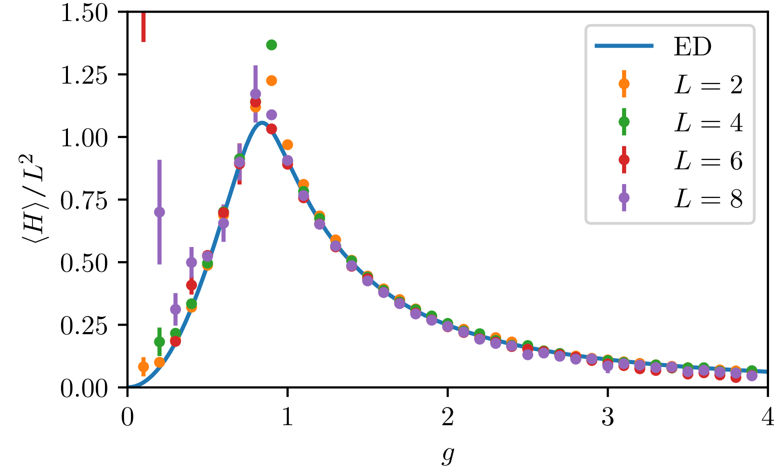
$\mathbb{Z}_3$純ゲージ理論 (GGPEPS) 2/2

Emonts-Bañuls-Cirac-Zohar,PRD102(2020)074501

✔ GGPEPSに基づくMC計算

$L = 2$

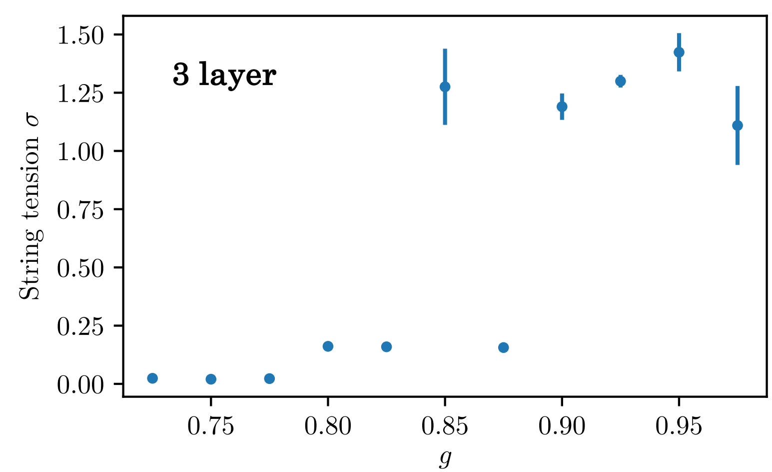




✔ Wilsonループの計算

$$\langle W(R_1, R_2)\rangle \sim \exp[-\sigma R_1 R_2]$$

$\boldsymbol{L = 6}$で複数の$(\boldsymbol{R_1, R_2})$で計算し$\boldsymbol{\sigma}$を決定

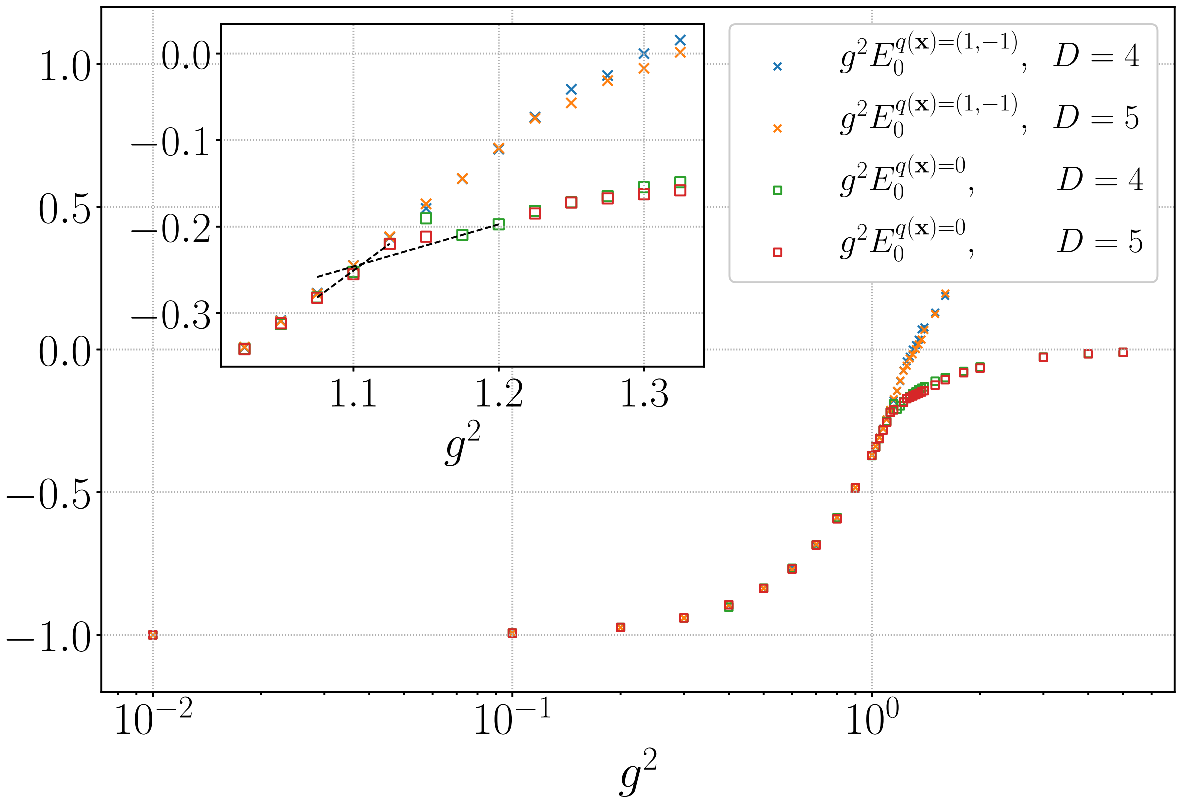


$\mathbb{Z}_3$純ゲージ理論 (iPEPS)

Robina-Bañuls-Cirac,PRL126(2021)050401

✔ iPEPSによる計算ではゼロ温度での閉じ込め・非閉じ込め相転移点が決定されている

Simple update



$\boxed{g_c^2 = 1.159(4)}$

Cf. 経路積分形式に基づくMC計算
i.e. 離散化された温度方向

Bazavov-Berg-Dubey,NPB802(2008)421

$g_c^2 = 0.92217(2)$

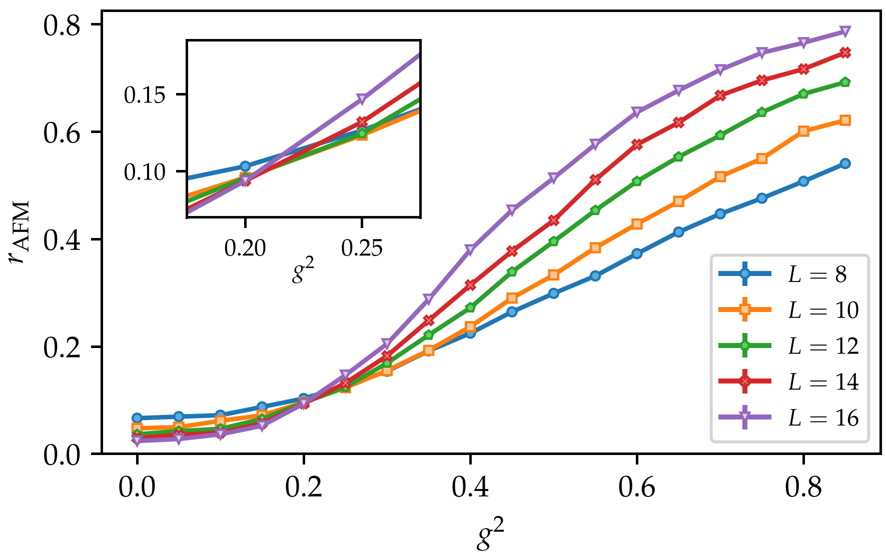
QED (GGPEPS)

Bender-Emonts-Cirac,PRR5(2023)043128

✔ U(1)ゲージ自由度を一切正則化せず, GGPEPSに基づくMC計算を実施

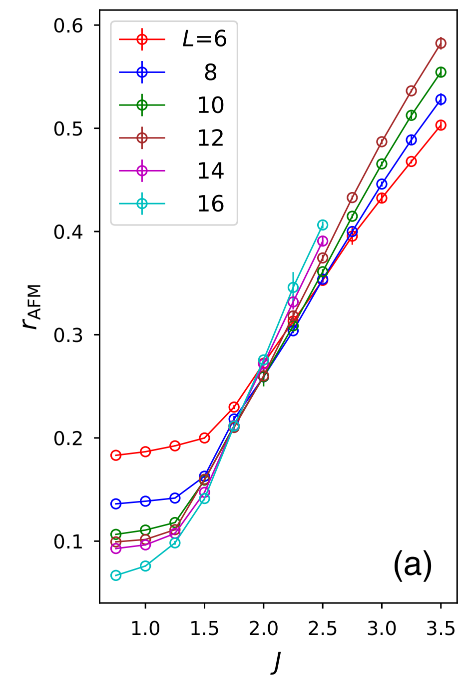
✔ Deconfined U(1) spin liquid相からAFM相への相転移点を決定

GGPEPS



MC

Xu-Zhang-Assaad-Xu-Meng,PRX9(2019)021022



MC	$\boldsymbol{g_c^2 = 0.40(5)}$
GGPEPS	$\boldsymbol{g_c^2 = 0.15(2)}$

Cf. TRGによる純U(1)ゲージ理論の計算: Unmuth−Yockey,PRD99(2019)074502
Cf. TTNによる計算: Felser-Silvi-Collura-Montangero,PRX10(2020)041040

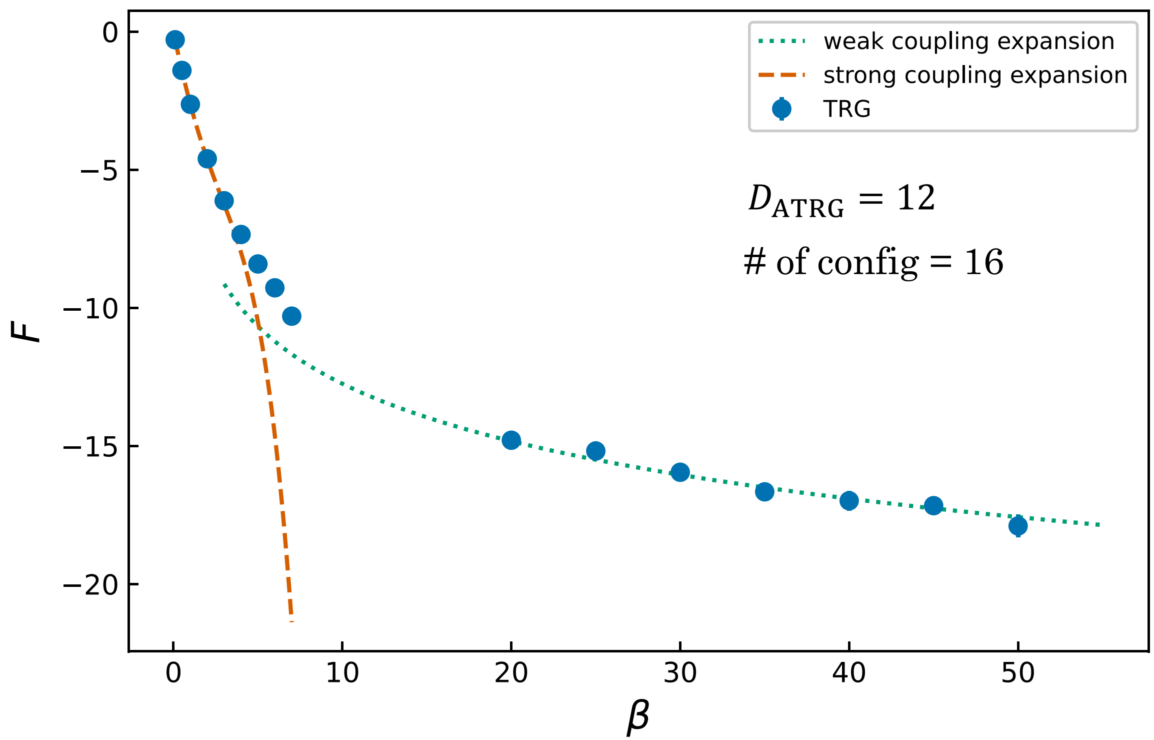
SU(2)純ゲージ理論 (TRG)

Kuwahara-Tsuchiya,PTEP2022(2022)093B02

✔ 試行作用を使った配位生成に基づくTN表現の構成

$$S = \left[\frac{\beta}{N}\sum_{n,\mu>\nu} \mathrm{ReTr}\left(1 - U_{\mu\nu}(n)\right) - \frac{H}{N}\sum_{n,\mu} \mathrm{ReTr}\left(U_\mu(n)\right)\right] + \frac{H}{N}\sum_{n,\mu} \mathrm{ReTr}\left(U_\mu(n)\right)$$

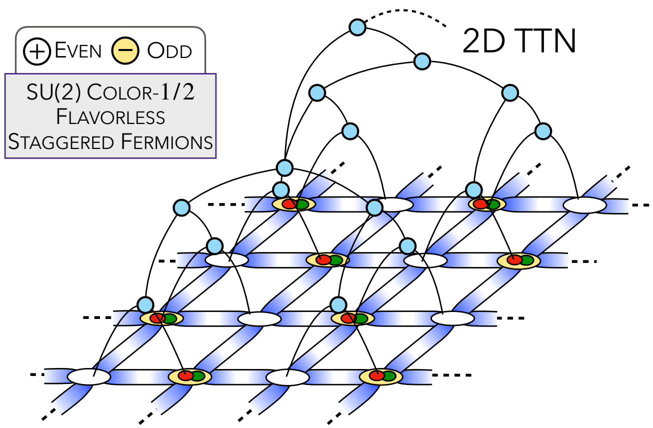
✔ 強結合展開と弱結合展開の自由エネルギーを再現することに成功

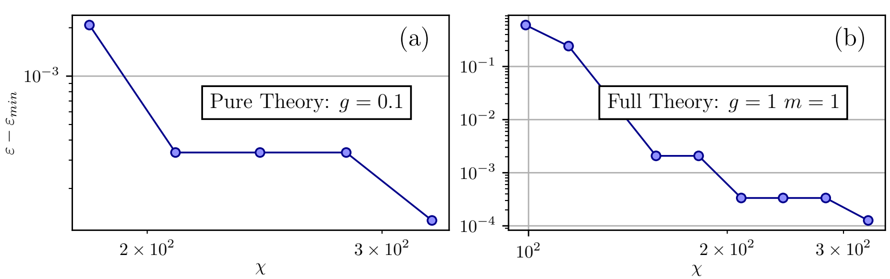


有限密度SU(2)Yang-Mills理論 (TTN)

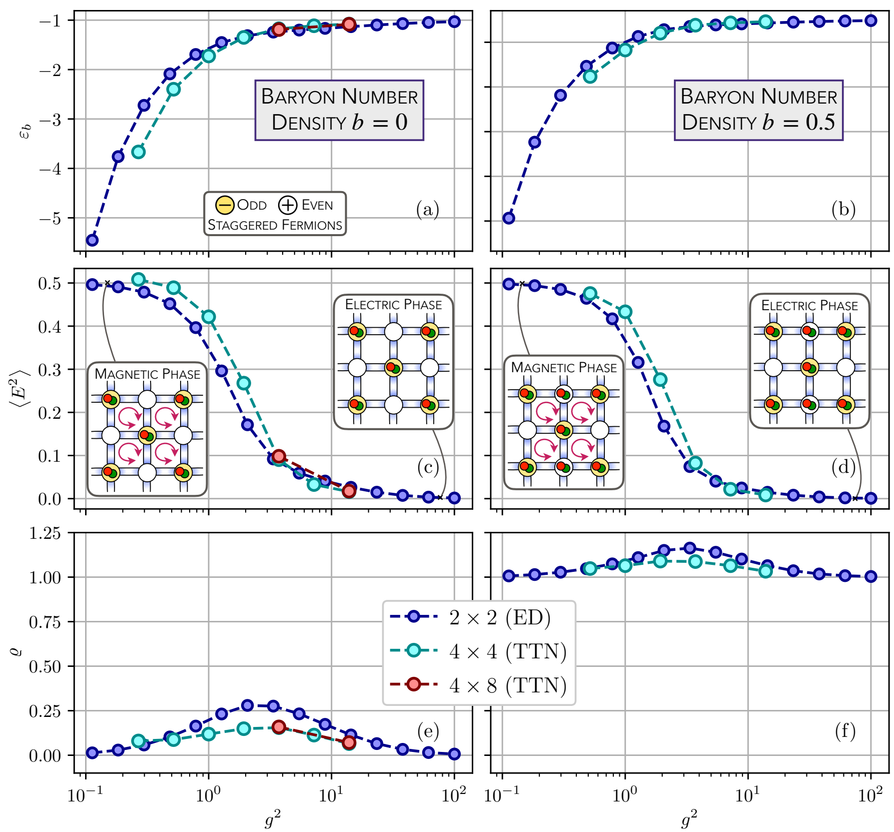
Cataldi-Magnifico-Silvi-Montangero,arXiv:2307.09396[hep-lat]

✔ Quantum Link Modelに基づいてSU(2)ゲージ場を正則化
各リンクの取り得る状態を$\{|00\rangle, |rr\rangle, |rg\rangle, |gr\rangle, |gg\rangle\}$の5状態に制限





4×4 w/ OBC



3次元系での応用状況をまとめると

- ✔ 複数のTN手法(TRG, TTN, PEPS, GGPEPS)による数値計算が報告されており, ゲージ理論への応用も進んでいる
- ✔ 相転移点の決定にとどまらず, 臨界指数の決定までできているケースも少なくない
- ✔ 興味のある理論・モデルの多くが格子上で並進対称性を持つため, 無限系を扱えるTRGやiPEPSの強みを活かしやすい
- ✔ 次の重要なステップはSU(3)自由度を含む格子理論だろう

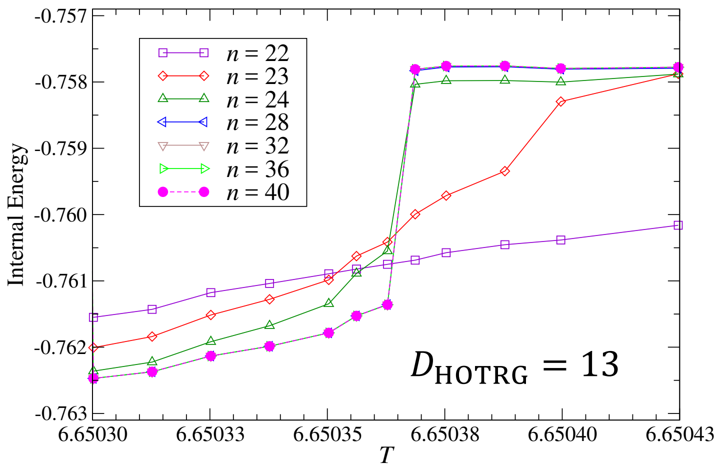
4次元系でのTN計算

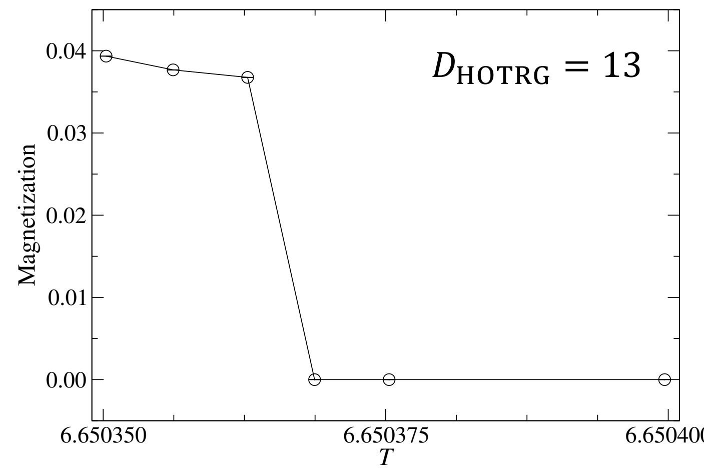
From Ising to QED

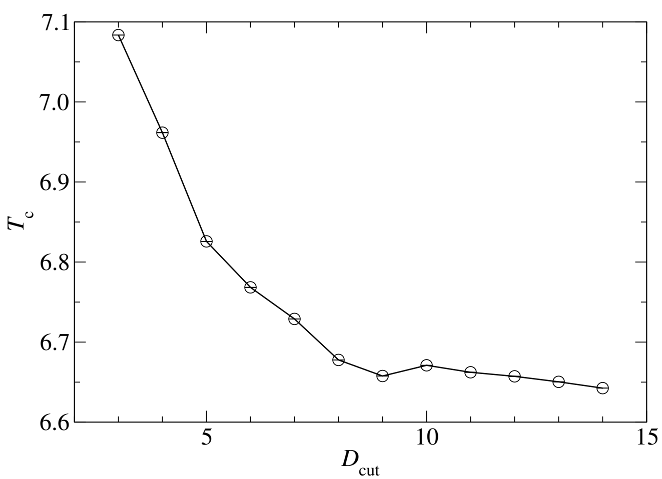
Ising模型 (TRG)

SA-Kuramashi-Yamashita-Yoshimura,PRD100(2019)054510

- ✔ 内部エネルギー,自発磁化,基底状態の縮退度を計算して相転移点と相転移次数を決定
- ✔ 数値結果は弱一次転移を示唆. MC法による転移点との間にtensionがある





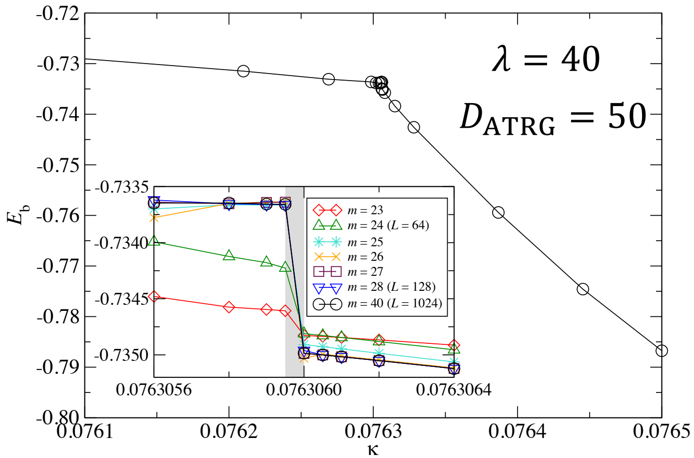


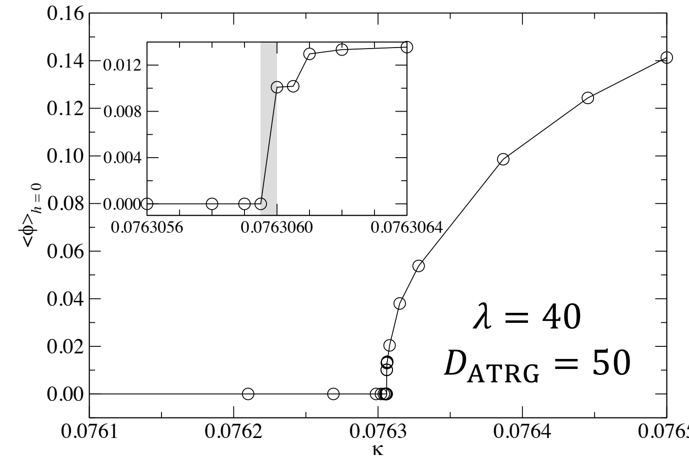
MC Lundow-Markström, PRE80(2009)031104	$T_c = 6.68026(2)$
HOTRG	$T_c = 6.650365(5)$

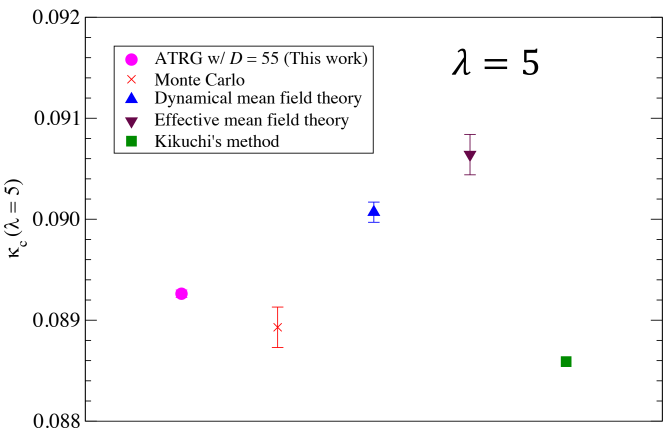
実ϕ^4理論 (TRG)

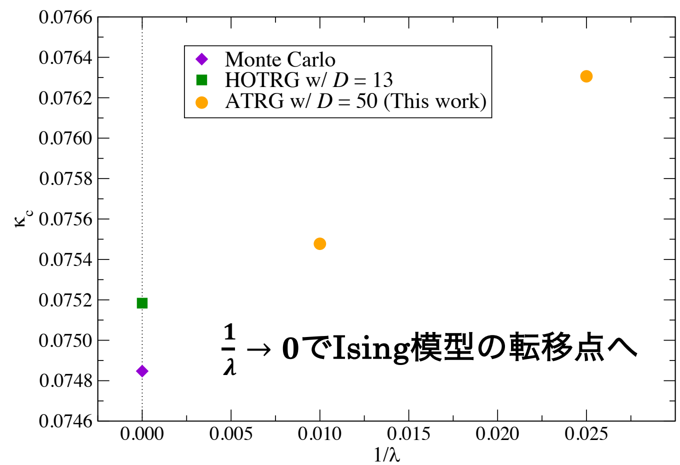
SA-Kuramashi-Yoshimura,PRD104(2021)034507

✔ 結合定数無限大極限でIsing模型になる（Ising模型のfinite-λ generalization）









Cf. Latest MC study: Lundow-Markström,NPB933(2023)116256

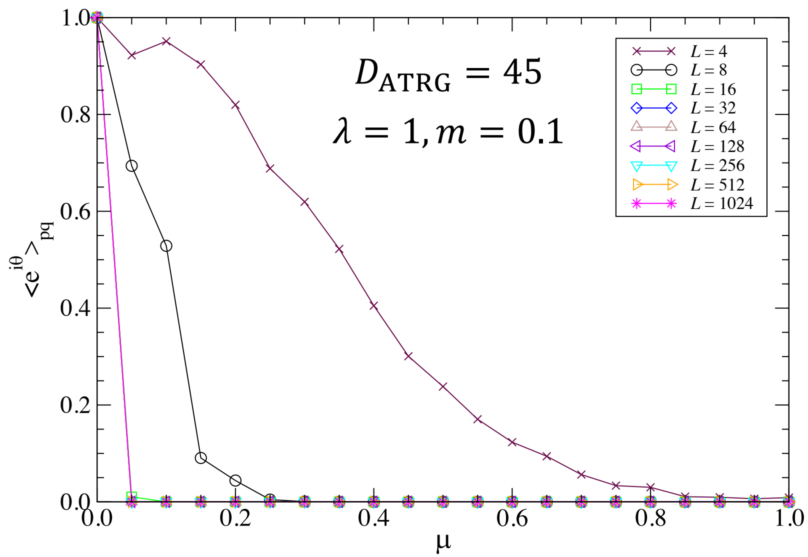
複素ϕ^4理論 (TRG)

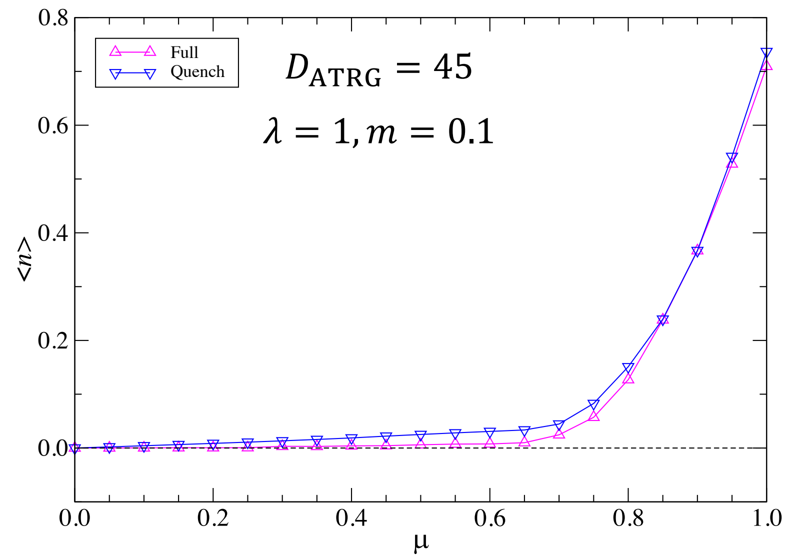
SA-Kadoh-Kuramashi-Yamashita-Yoshimura,JHEP09(2020)177

✔ 複素スカラー場を$\phi = re^{i\theta}$と表現し, 2種類のGauss求積法を使って離散化

✔ ゼロ温度・無限体積極限に特有のSilver Blaze現象が確認されている

✔ Silver Blaze現象を再現するには作用の虚部が重要

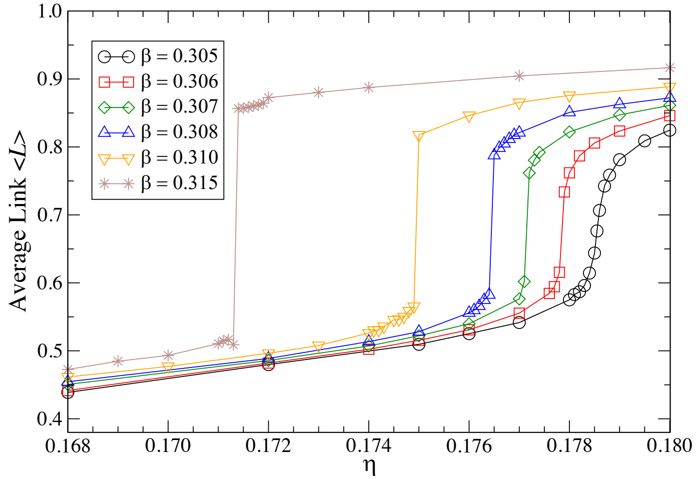


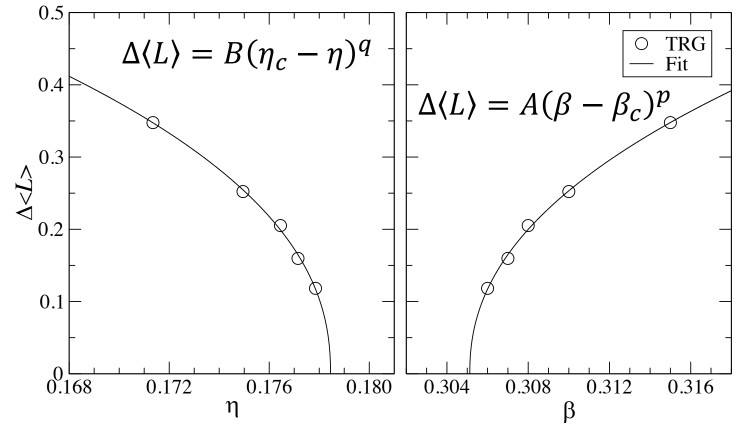


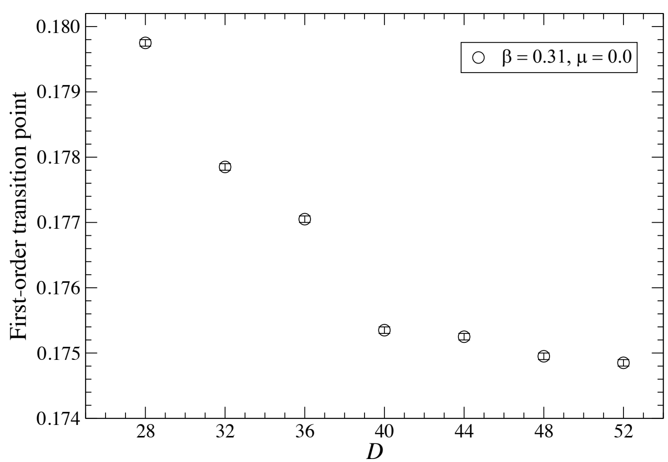
$\mathbb{Z}_2$ゲージ・Higgs模型 (TRG)

SA-Kuramashi,JHEP05(2022)102

✔ Confinement-Higgs相転移線と臨界終点の決定. ModernなMC法による再計算が望まれる







Mean-field Brezin-Drouffe, NPB200(1982)93	$(\beta_c, \eta_c) = (0.22, 0.205)$
MC on $V = 8^4$ Creutz, PRD21(1980)1006	$(\beta_c, \eta_c) = (0.22(3), 0.24(2))$
ATRG w/ $D = 52$	(β_c, η_c) $= (0.3051(2), 0.1784(2))$

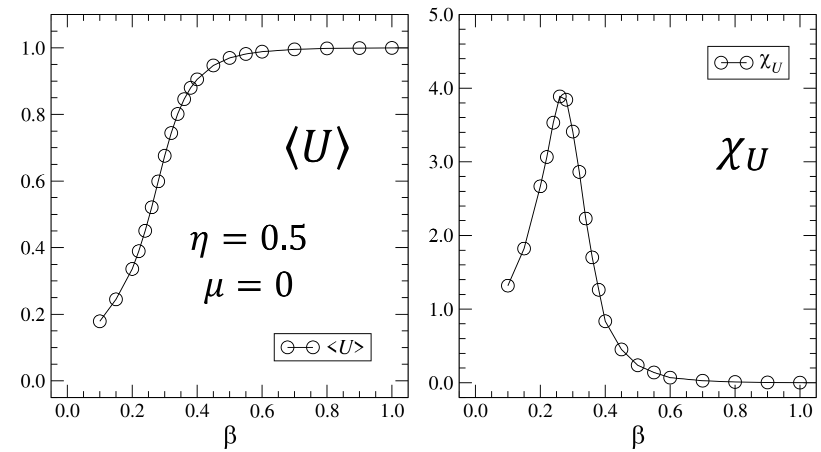
$\mathbb{Z}_3$ゲージ・Higgs模型 (TRG)

SA-Kuramashi,JHEP10(2023)077

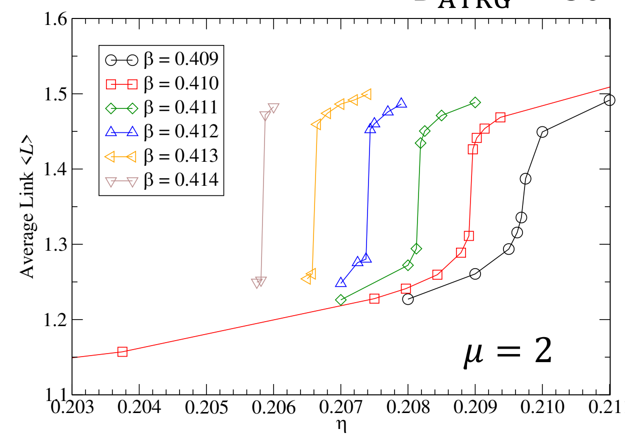
✔ Spin-spin couplingが強い領域でMC法とのconsistencyを確認

✔ Average linkのトビから磁化の指数を見積もると$\beta \approx 0.46$

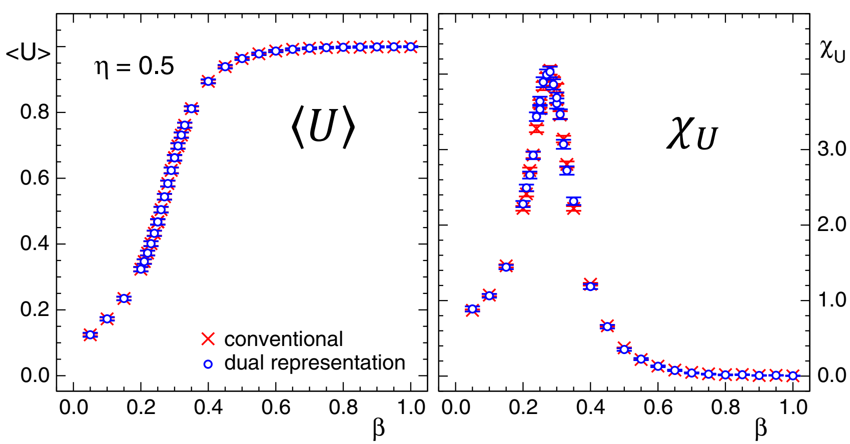
ATRG w/ $D = 45$

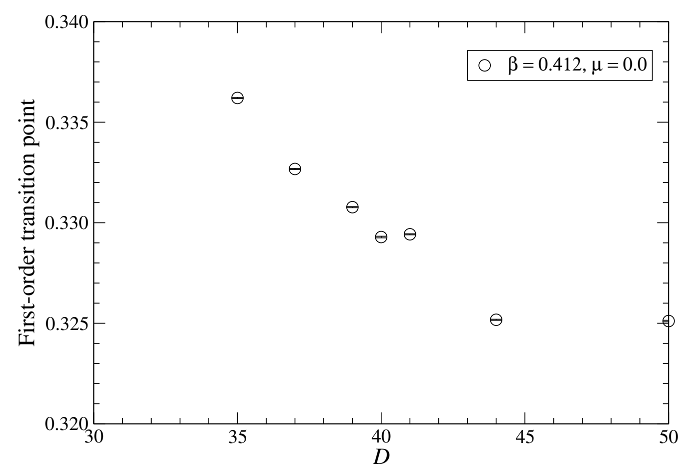


$D_{\mathrm{ATRG}} = 50$



MC Gattringer-Schmidt, PRD86(2012)094506





Infinite-coupling U(N)模型 (TRG)

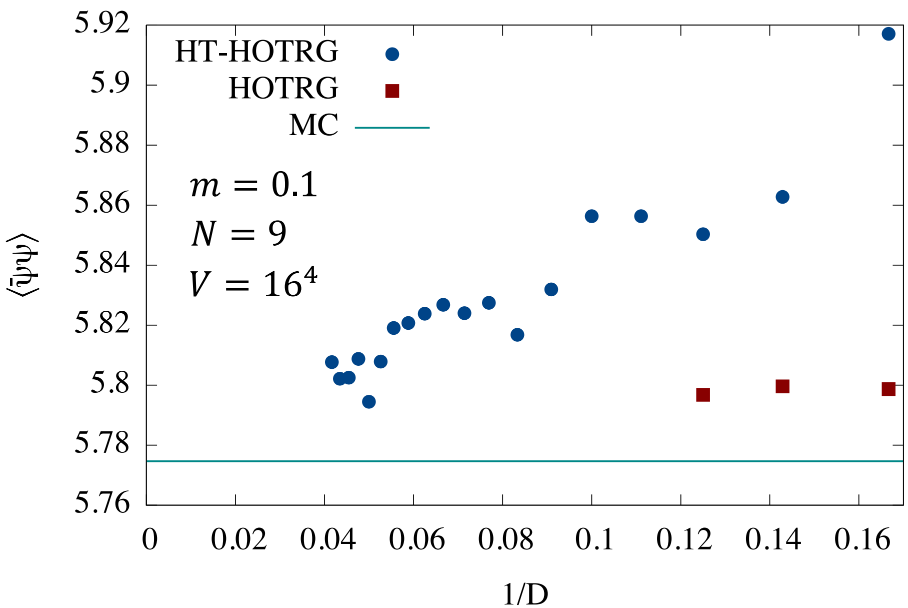
Milde-Bloch-Lohmayer,PoS,LATTICE2021(2022)462

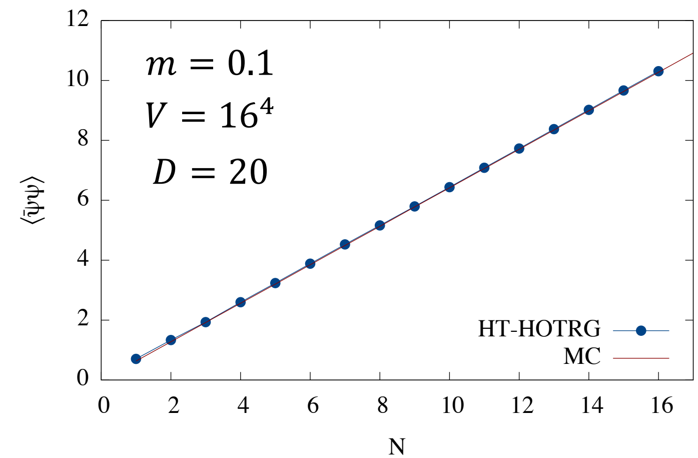
- ✔ ゲージ場, フェルミオン場を全て積分してdimer-monomer模型に書き換える
- ✔ HOTRGを使うが局所テンソルを以下で近似し, 計算コストは$O(D^{15}) \to O(D^{8})$

$$T_{txyzt'x'y'z'} \approx \sum A_{tt'a}B_{xx'b}C_{yy'c}D_{zz'd}E_{abe}F_{cde}$$

- ✔ $N \to \infty$でのカイラル凝縮を見積もった

カイラル凝縮





	$\lim_{N\to\infty} \frac{\langle\bar{\psi}\psi\rangle}{N}$
HT-HOTRG (D=20)	0.637(2)
Metropolis	0.64279(1)

有限密度NJL模型 (TRG)

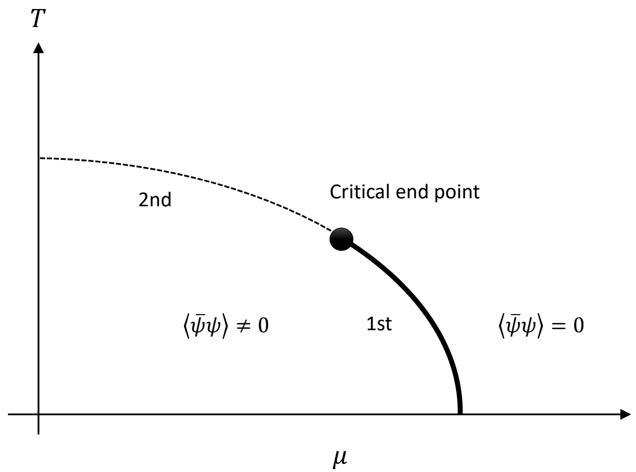
SA-Kuramashi-Yamashita-Yoshimura,JHEP01(2021)121

✔ 有限密度QCDの低エネルギー有効理論. Staggeredフェルミオンによる定式化に基づく

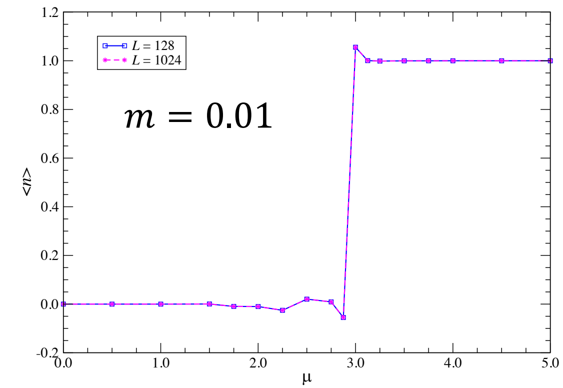
✔ 低温・高密度領域で期待されるカイラル一次相転移が捉えられている

$D_{\mathrm{ATRG}} = 55$

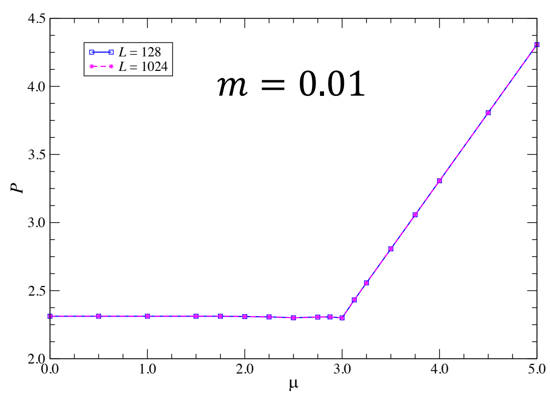
$g^2 = 32$



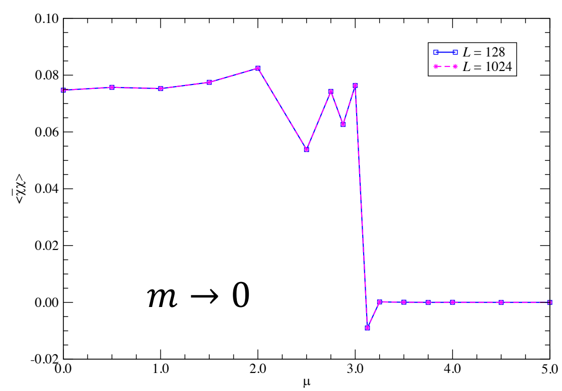
数密度

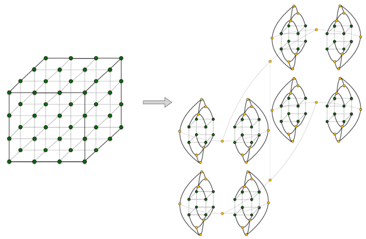


圧力



カイラル凝縮

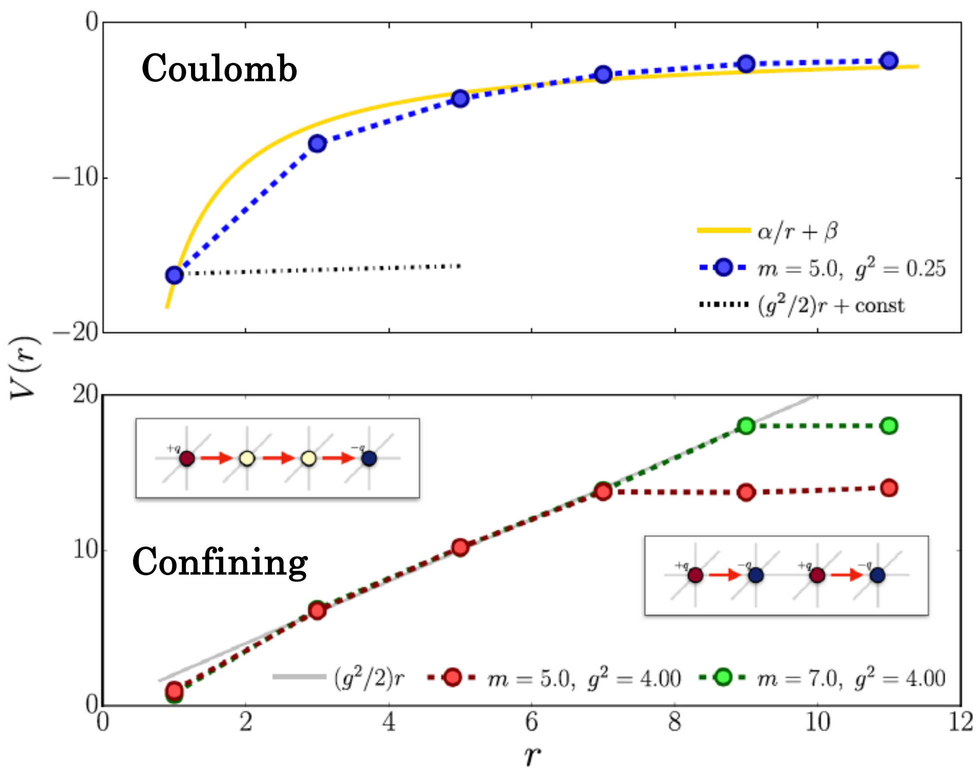


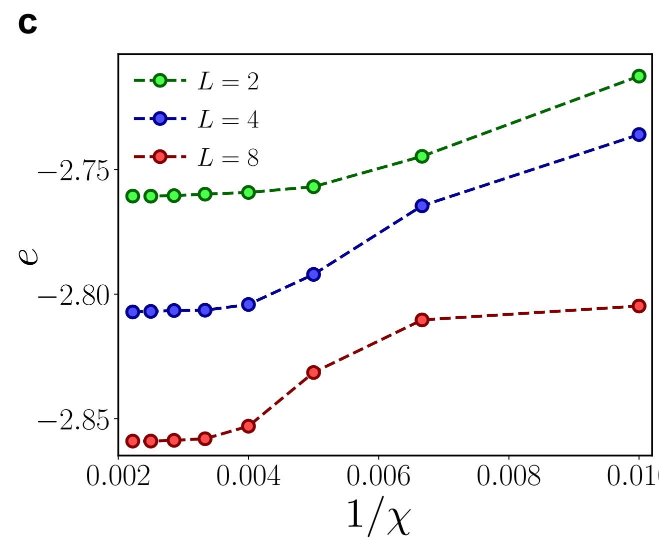


QED (TTN)

Magnifico-Felser-Silvi-Montangero,Nat.Commun.12(2021)3600

✔ QLMに基づく正則化. 線形/Coulombポテンシャルを捉えられている





“a single simulation for the maximum size that we reached, an 8×8×8 lattice, can last up to five weeks until final convergence, depending on the different regimes of the model and the control parameters of the algorithms”

4次元系での応用状況をまとめると

- ✔ TRGとTTNの2手法が4次元系に応用されている
- ✔ 4次元系のTN計算では今のところATRGが最も有力
- ✔ 相転移点の決定は可能. 臨界指数の決定はまだ
- ✔ まだ応用例はないが4次元系に対するGGPEPSの構成については議論が進んでいる
  Emonts-Zohar,PRD108(2023)014514
- ✔ HPCの利用を前提としたアルゴリズムの実装も重要
  Yamashita-Sakurai,CPC278(2022)108423, SA-Kuramashi-Yamashita-Yoshimura,PoS(LATTICE2019)138

全体的なまとめと展望

- ✔ HEP分野の高次元格子理論に対しては複数のTN手法(TRG, TTN, PEPS, GGPEPS)による数値計算が報告されており, ゲージ理論への応用も進んでいる

- ✔ 演算子形式と経路積分形式のTN計算は一見様相が異なるが, ゲージ自由度の正則化をいかに施すかという問題は共通であり, 相互発展の余地がありそう

- ✔ 有限ボンド次元効果に関する理解

Talk by 上田篤さん
Tagliacozzo-Oliveira-Iblisdir-Latorre,PRB78(2008)024410
Pollmann-Mukerjee-Turner-Moore,PRL102(2009)255701
Huang-Chan-Kao-Chen,PRB107(2023)205123

- ✔ 格子フェルミオン系のTN表現

SA,PRD108(2023)034514
Yosprakob-Nishimura-Okunishi,arXiv:230901422[hep-lat]

- ✔ ゲージ理論へのTN法の応用を考える場合には確率論的手法との連携も要検討

Talk by 大木さん
Talk by 藤堂さん