

場の理論+テンソルネットワークによる精密計算

上田 篤

The Institute for Solid State Physics (ISSP)

Nov. 15 2023



THE INSTITUTE FOR
SOLID STATE PHYSICS
THE UNIVERSITY OF TOKYO

- ① 背景
- ② 結合定数の計算
- ③ 有限バンド次元効果とは
- ④ 固定点テンソルへの場の理論的アプローチ
- ⑤ まとめ

本講演の流れ

テンソルネットワークにできて、
Monte-Carlo シミュレーションにできないことは何か...?

本講演では、
以下の二つのことがテンソルネットワークを使うとできることを紹介します。

- 格子模型から場の理論の結合定数を精密に計算
A.U and M. Oshikawa(2023)
- Critical 繰り込み群固定点のテンソルネットワーク表現
A.U and M. Yamazaki(2023)

- 1 背景
- 2 結合定数の計算
- 3 有限バンド次元効果とは
- 4 固定点テンソルへの場の理論的アプローチ
- 5 まとめ

相転移と有効ハミルトニアン

物性分野において、繰り込み群 (RG) は 2 次相転移を説明するために導入されました。

$$H_{\text{lattice}} = -J \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - \Gamma \sum_i \sigma_i^x$$

$$\xrightarrow{\text{SSB} \quad J \quad \text{Disorder} \quad \Gamma}$$

格子模型を説明するような有効ハミルトニアン H^{eff} があると仮定し、**"臨界点からの距離"**である結合定数 g_n を導入しましょう。

$$H_{\text{lattice}}^{\text{eff}}(L, \Gamma) = H^*(J = \Gamma) + \int_0^L dx g_n(x, \Gamma - J) \hat{\Phi}_n(x)$$

ローカルハミルトニアンは Γ に関して連続であるはずなのに
相境界の $L = \infty$ では g_n は不連続性を持たなければならない。 Why?

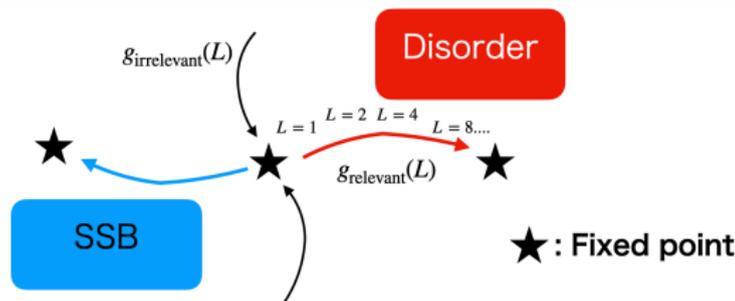
繰り込み群

g_n は $L = \infty$ で不連続になるのは g_n に L 依存性があるから。

$$\frac{dg_n}{d(\log(L))} = (d - x_n)g_n \rightarrow g_n(L) = g_n(1)L^{d-x_n}$$

d : dimension, x_n : scaling dimension

$g_n(L) \rightarrow -\infty$ (SSB) and $g_n(L) \rightarrow \infty$ (Disorder)



結合定数 $g_n(L)$ が L とともにどのように発展していくかが相図 (RG フロー) を決めるので、 $g_n(L)$ を計算することは重要。

$H_{lattice}(L, \Gamma)$ の固有値 $E_n(L)$ を計算できれば、 $g_n(L)$ が求められそう。

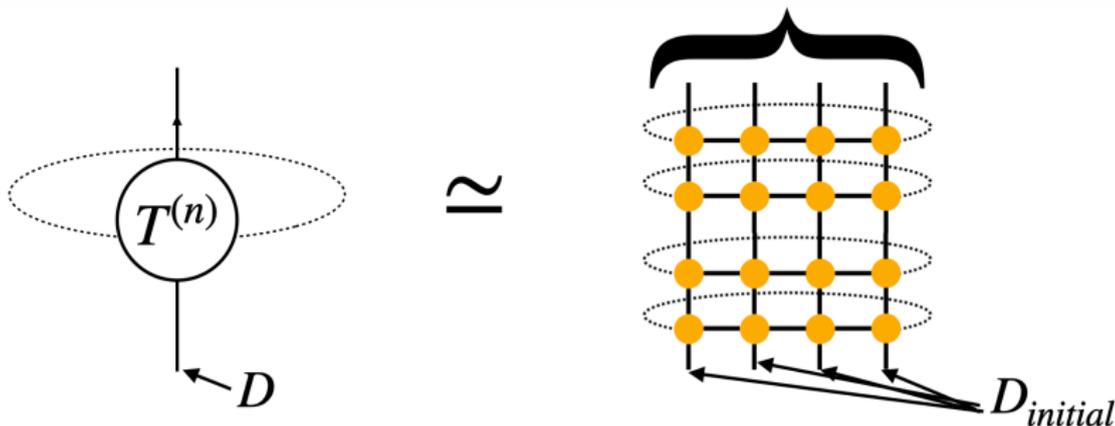
テンソルネットワークによる $E_n(L)$ の計算

$E_n(L)$ を厳密対角化で計算することは指数関数的に難しい。

($L < 20$ for the Ising)

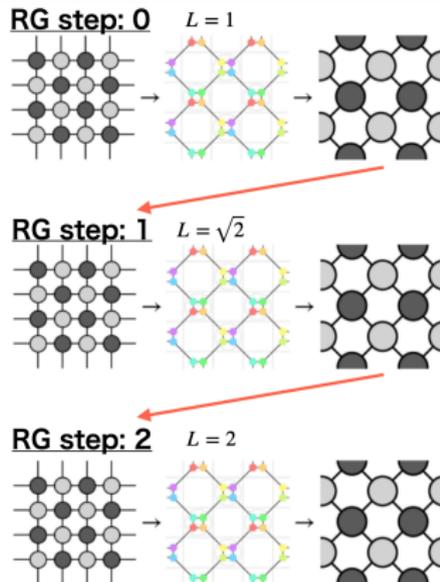
テンソルネットワークは指数関数的に大きいヒルベルト空間を次元 D の情報で近似する. こうすることで、イジング模型の場合は $L > 100$ の低エネルギー固有値の情報を少ない誤差で近似できる。

$$D \ll (D_{\text{initial}})^L$$



テンソルネットワーク繰り込み群

二次元古典系を扱う場合は、ローカルなボルツマン係数を宿したテンソルを縮約することで、**分配関数**を表現する。



Initial tensor: Boltzmann weight

$$T^{(0)} = e^{\beta(s_i s_j + s_j s_k + s_k s_l + s_l s_i)}$$



RG step: n

$$L = \sqrt{2}^n$$

x -軸方向のみ縮約すると**転送行列**が作れて、その固有値 λ_n から、エネルギースペクトラム $E_n = -\ln(\lambda_n)/L$ が読み取れる。

- ① 背景
- ② 結合定数の計算
- ③ 有限バンド次元効果とは
- ④ 固定点テンソルへの場の理論的アプローチ
- ⑤ まとめ

転送行列の固有値

二次元臨界現象を記述する共形場理論 (CFT) において、励起状態はと CFT のオペレーターは一対一の対応がある。

有限サイズ L におけるエネルギーギャップは、そのオペレーターのスケールリング次元 x_n に対応しており、そこから x_n を読み取れる。

$$E_n(L) - E_0(L) = \frac{2\pi v}{L} x_n$$

二次元古典系では、 E_n は転送行列の固有値 λ_n で記述され、最大固有値 λ_0 との比で x_n を計算することができる。

$$\lambda_n(L) = \exp(-LE_n(L)) \rightarrow \frac{\lambda_n}{\lambda_0} = \exp(-2\pi x_n)$$

摂動論

有限サイズ L では、エネルギーギャップは x_n から少しずれる。

$$\frac{L}{2\pi}(E_n(L) - E_0(L)) \neq x_n,$$

これは格子模型が場の理論である CFT で完璧に記述されていないからである。よって格子模型の有効ハミルトニアンは演算子 Φ_n の摂動が加わったもので表現される。

$$H_{lattice} = H_{CFT}^* + \sum_n \int_0^L dx g_n(L) \Phi_n(x).$$

この有効ハミルトニアンのもとエネルギーギャップを摂動論で計算すると $x_n(L)$ が (ユニバーサルな定数) $\times g_n(L)$ の和で表されることがわかる。

$$\frac{L}{2\pi}(E_n(L) - E_0(L)) = x_n(L)$$

$$x_n(L) = x_n + 2\pi \sum_n C_{nnj} g_j(L)$$

$x_n(L)$ を finite-size スケーリング次元と呼び、ここから $g_n(L)$ を計算する。

例: イジング模型

- ① finite-size スケーリング次元 $x_n(L)$ を繰り込まれたテンソル $T^{(n)}$ から計算する

$$\frac{\lambda_n(L)}{\lambda_0(L)} = \exp(-2\pi x_n(L))$$

- ② $x_n(L)$ とスケーリング次元 x_n の差を計算する

$$H = H_{\text{Ising}}^* + \int_0^L dx [g_h \sigma(x) + g_t \epsilon(x)]$$

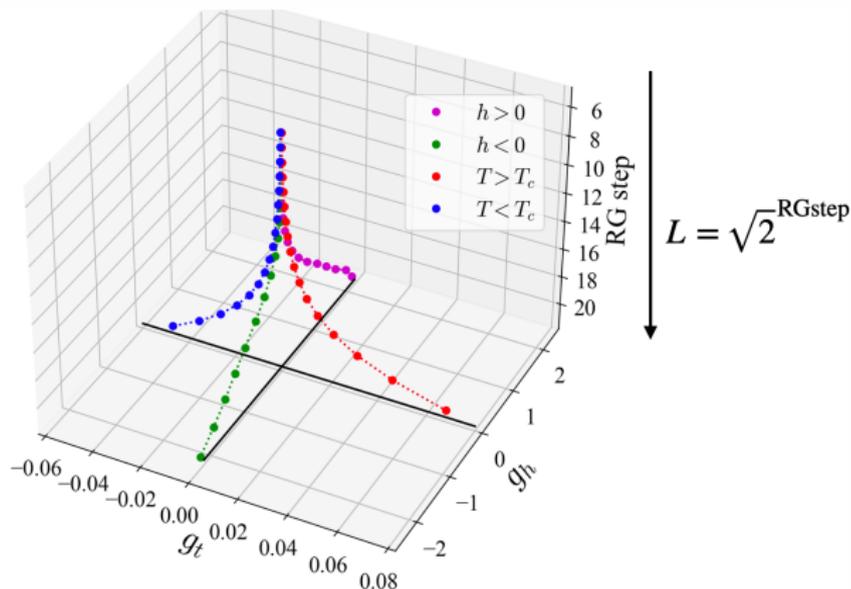
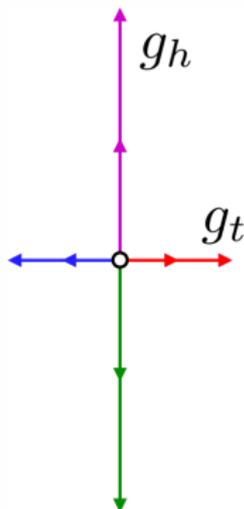
$$x_\sigma(L) - x_\sigma = x_\sigma(L) - \frac{1}{8} = \pi g_t(L)$$

- ③ $g_t(L)$ を各システムサイズ L についてプロットする

$$g_t(L) = \frac{1}{\pi} (x_\sigma(L) - \frac{1}{8})$$

イジング模型のRGフロー

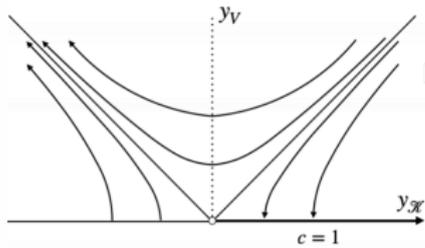
$$H_{Ising} = H_{Ising}^* + \int_0^L dx [g_h \sigma(x) + g_t \epsilon(x)]$$



XY 模型における Kosterlitz RG フロー

$$H_{XY} = H_{K=2}^{TLL} + \int \frac{dx}{2\pi} \left[\frac{y_K}{2} \mathcal{K} + y_V \cos(2\phi) \right]$$

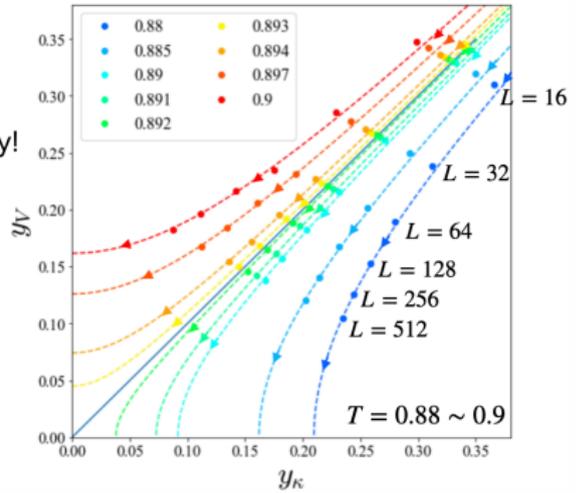
Theoretical RG flow



Match perfectly!



Our result (XY model)



これまでのまとめ

テンソルネットワークは、
 低エネルギー状態であれば**大きいシステムサイズまで計算できる**。
 これによって $x_n(L) = \frac{L}{2\pi}(E_n(L) - E_0(L))$ を計算できる。

$$x_n(L) = x_n + 2\pi \sum_j C_{nnj} g_j$$

Universal term

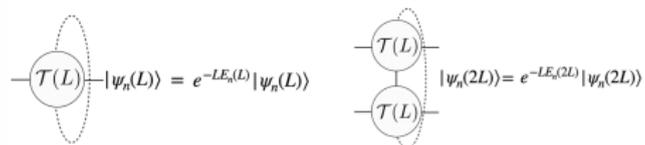
Running coupling constants

結合定数 $g_j(L)$ は $x_n(L) - x_n$ を計算することで読み取ることができる！¹.

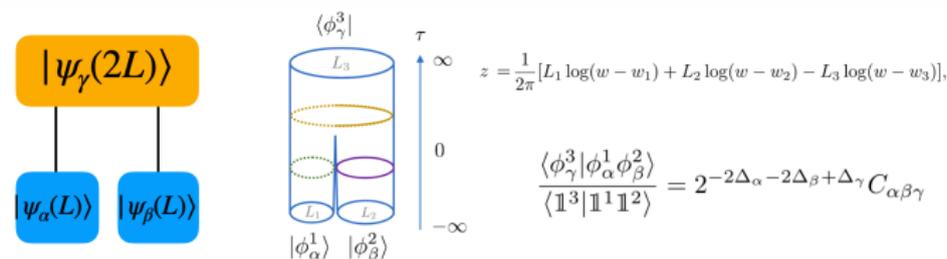
¹In practice, we can often compute specific g_j by properly choosing n .

おまけ: OPE C_{ijk} の計算

OPE は繰り返されたテンソルの固有ベクトルを組み合わせることで計算できる。
(A.U and M.Oshikawa (2023))



3つの固有ベクトルを縮約すると、波動関数の overlap を計算していることになる。これは、path-integral の pants-diagram で表現できる。これは conformal mapping によって三点関数に map される。(Y.Liu et al. (2022))



テンソルネットワークにおける有限ボンド次元効果

At criticality, $x_n(L)$ should converge to the CFT values.

$$x_n(L) \rightarrow x_n \quad (L \rightarrow \infty)$$

However, the numerical $x_n(L)$ deviates from x_n due to the finite bond dimension D .

$$x_n(D, L \rightarrow \infty) \neq x_n$$

It is natural to ask if this error can be explained through perturbation theory.

$$x_n(D, L) = x_n + 2\pi \sum_j C_{jjn} g_j(D) \dots?$$

Universal term

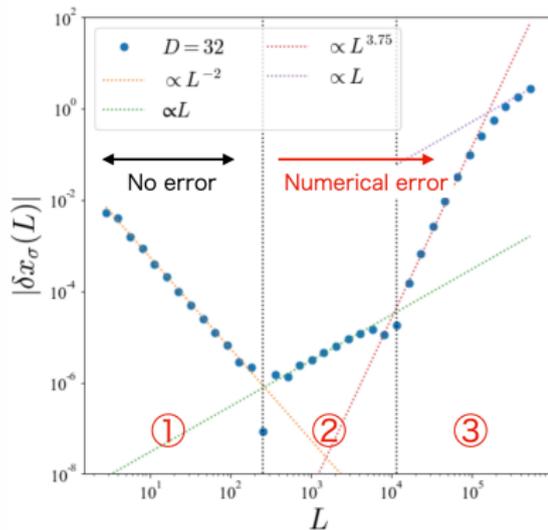
Numerical error

- ① 背景
- ② 結合定数の計算
- ③ 有限バンド次元効果とは
- ④ 固定点テンソルへの場の理論的アプローチ
- ⑤ まとめ

$x_\sigma(L)$ への有限バンド次元効果

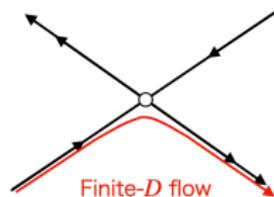
The numerical errors at criticality behave as if the system has relevant perturbations.

$$\delta x_\sigma(D, L) = x_\sigma(D, L) - x_\sigma = 2\pi \sum_j C_{jj\sigma} g_j(D) \dots?$$



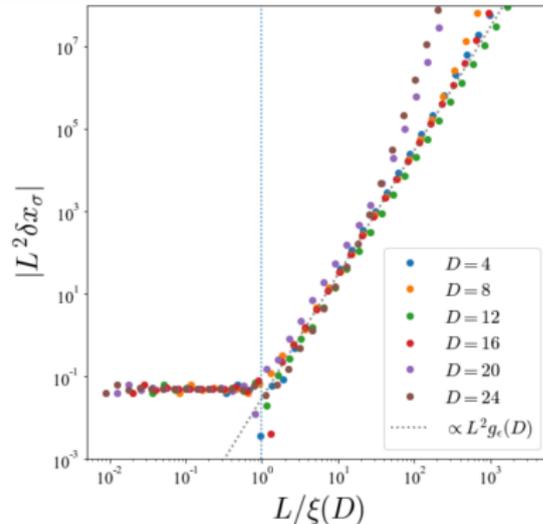
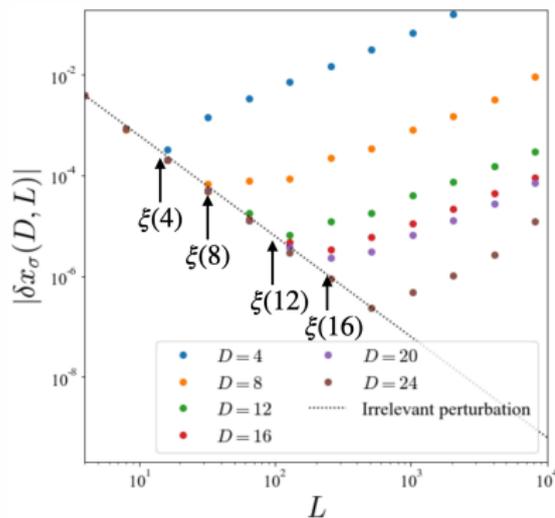
Numerical error

- ① Irrelevant perturbation of the lattice model
- ② Numerical error with $g_\epsilon(D)$ scaling ($\propto L$)
- ③ Numerical error with $g_\sigma^2(D)$ scaling ($\propto L^{3.75}$)



有限バンド次元は有限相関長 $\xi(D)$ を誘発

The numerical errors start appearing at $L \simeq \xi(D)$.



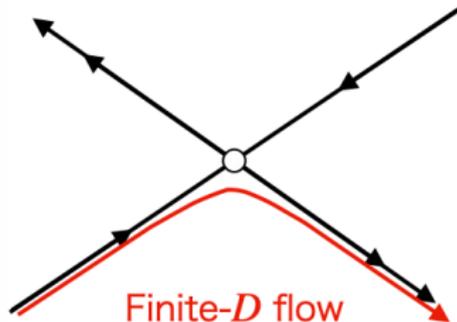
The data collapse when rescaled with $\xi(D) = \xi_0 D^\kappa$, thus $g_\epsilon(D)$ has **universal amplitude** depending on D .

$$\kappa = \frac{6}{c(1+\sqrt{12/c})}$$

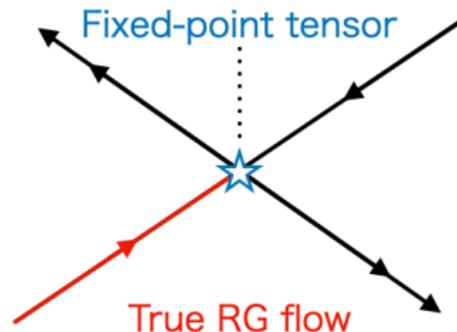
固定点テンソルへの場の理論的アプローチ?

有限ボンド次元効果によって、実際のテンソル繰り込みでは固定点テンソルは計算できない。

Practical situation



Ideal situation



一方で、場の理論による解析的な計算で固定点テンソル T_{ijkl}^* を計算することができたら、有限ボンド次元効果などをより深く理解できる。

- ① 背景
- ② 結合定数の計算
- ③ 有限バンド次元効果とは
- ④ 固定点テンソルへの場の理論的アプローチ
- ⑤ まとめ

固定点テンソル

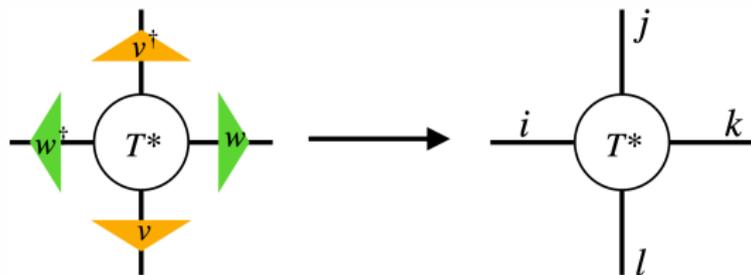
RG ステップを繰り返すことで繰り込まれたテンソル $T^{(n)}$ は、
固定点テンソルとよばれるユニバーサルなテンソル T^* に収束する。

$$T^* = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(L)}$$

T^* は無限大のボンド次元を持つが
自明な/ギャップの空いた固定点の T^* は有限ボンド次元の表現をもつ。

ゲージ変換と転送行列基底

各ボンドの基底を変換するユニタリー演算子 ww^\dagger の挿入は縮約されたテンソルネットワークを不変に保つ。これをテンソルネットワークの**ゲージ自由度**という。



ここでは、各ボンドの基底を転送行列基底にとる。こうすることで、ギャップより上の転送行列固有値 λ_n と最大固有値 λ_0 との比が0に収束する。

$$\frac{\lambda_n(L)}{\lambda_0(L)} = \exp(-L(E_n - E_0)) \rightarrow 0 \quad (E_n \neq E_0)$$

すなわち、**ボンド次元がたかだか GS の縮退度で T^* を表現できる。**

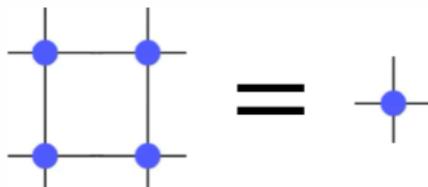
自明な固定点テンソル

一番自明な固定点テンソルとして以下のものがある。

$$T_{0000} = 1$$

$$T_{ijkl} = 0 \quad (\text{otherwise})$$

この自明なテンソルは $r' = 2r$ スケール変換に対して、固定点になっている。



このテンソルは高温相イジング模型の $T^{(0)}$ を繰り込むことで得ることができる。
(High-temperature FP)

RG の厳密な証明

自明な固定点テンソルの安定性は、テンソル繰り込みを用いて厳密に示すことができる。

Tensor RG Approach to High-Temperature Fixed Point

Tom Kennedy¹ ● · Slava Rychkov^{2,3}

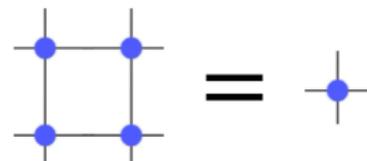
Received: 31 August 2021 / Accepted: 1 April 2022 / Published online: 2 May 2022
© The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2022

Tensor Renormalization Group at Low Temperatures: Discontinuity Fixed Point

Tom Kennedy^{1,a} ●, Slava Rychkov^{2,b} ●

¹Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA, ^atk@math.arizona.edu
²Institut des Hautes Études Scientifiques, 91440 Bures-sur-Yvette, France, ^bslava@ihes.fr

$$T^* + \delta A(L) \xrightarrow{\text{RG map}} T^* + \delta A'(2L)$$



自明な固定点に摂動 $\delta A(L)$ を加えた時、以下の定理を示した。

$$|\delta A'(2L)| < \gamma |\delta A(L)| \quad (0 \leq \gamma < 1)$$

$$|\delta A'(2^n L)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

臨界 (非自明) 固定点の不安定性は証明できるか?

非自明固定点の難しさ

ギャップの空いている場合とは異なり臨界系では、転送行列の固有値比が $L \rightarrow \infty$ でも有限値を持つ。

$$\frac{\lambda_n(L)}{\lambda_0(L)} = \exp(-L(E_n - E_0)) \quad E_n - E_0 = \frac{2\pi}{L}x_n$$

$$\longrightarrow \frac{\lambda_n(L)}{\lambda_0(L)} = \exp(-2\pi x_n) \neq 0$$

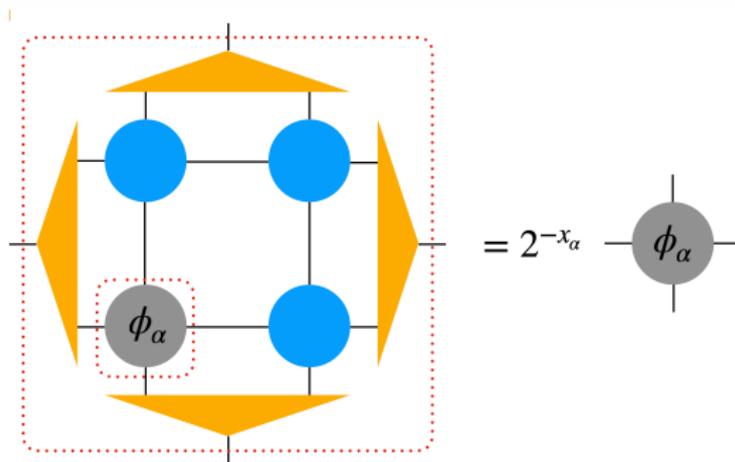
よって非自明固定点テンソルは $D = \infty$ の 4-leg テンソルで、各ボンドの基底はプライマリー場 ϕ_α とその descendants で張られる。

$$\alpha \text{ --- } \textcircled{T^*} \text{ --- } \beta = \delta_{\alpha\beta} e^{-2\pi x_\alpha}$$

.... こんなのがわかるのかな...?

非自明固定点特定へのヒント

固定点テンソルはスケール変換 $\mathcal{R}\phi_\alpha(2r) = 2^{-x_\alpha} \phi_\alpha(r)$ の解になっている。
 特に、固定点テンソルはこれらの最小スケーリング次元 $x_1 = 0$ に対応し、 $T^* = \phi_1$ である。



つまり、固定点テンソルは unitary CFT の基底状態 (identity operator) の表現

$T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は波動関数の overlap!

固定点テンソルの足を転送行列基底でゲージ固定する

$$\alpha - \textcircled{T^*} - \gamma = T_{\alpha\beta\gamma\delta} |\phi_\alpha\rangle |\phi_\beta\rangle |\phi_\gamma\rangle |\phi_\delta\rangle$$

テンソル要素 $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は T^* と $\langle\phi_\alpha| \langle\phi_\beta| \langle\phi_\gamma| \langle\phi_\delta|$ の overlap になっている

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{array}{c} \phi_\alpha(L) \quad \phi_\beta(L) \quad \phi_\gamma(L) \quad \phi_\delta(L) \\ | \\ \text{---} T^* = \phi_1(4L) \text{---} \end{array}$$

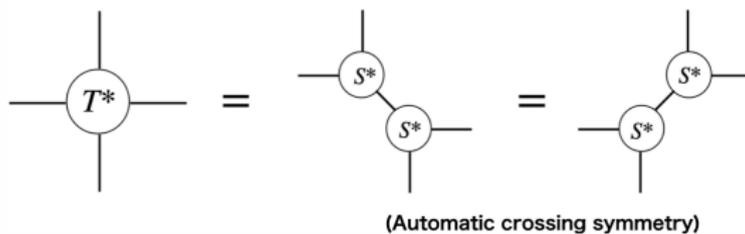
波動関数の overlap による OPE 計算方法の場合と同様に

$$\rightarrow T_{\alpha\beta\gamma\delta} \sim \langle\phi_\alpha\phi_\beta\phi_\gamma\phi_\delta\rangle$$

非自明固定点の解

Our results

空間 \mathbb{D}_4 symmetry がある時, 固定点テンソル T^* とその半分 S^* のテンソル要素は CFT の四点・三点相関関数で決まる。



$$S_{\alpha\beta\gamma}^* = \langle \phi_\alpha(-x_S) \phi_\beta(ix_S) \phi_\gamma(0) \rangle_{\text{pl.}}$$

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \langle \phi_\alpha(-x_T) \phi_\beta(ix_T) \phi_\gamma(x_T) \phi_\delta(-ix_T) \rangle_{\text{pl.}}$$

$$x_S = e^{\pi/4} \text{ and } x_T = e^{\pi/2}/2$$

Sketch of the proofs I

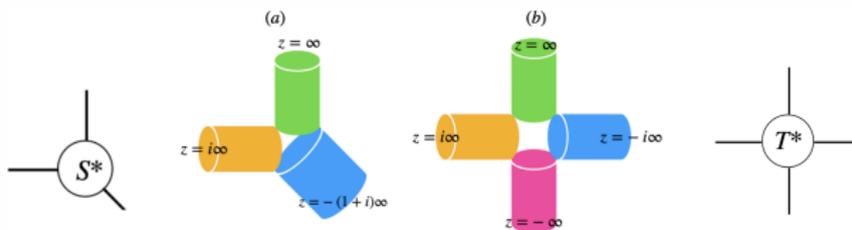
Each index is a quantum state on a ring and, thus, represented by the path-integral on a cylinder.

$$|\phi^1\rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-\Delta_\alpha} \lim_{z \rightarrow \infty} e^{2\pi z \Delta_\alpha / L} \phi_\alpha(\infty) |I^{cyl}\rangle,$$

$$|\phi^2\rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-\Delta_\beta} \lim_{z \rightarrow i\infty} e^{-i2\pi z \Delta_\beta / L} \phi_\beta(i\infty) |I^{cyl}\rangle,$$

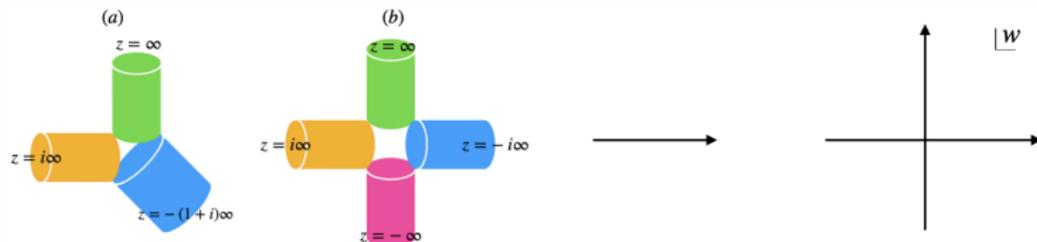
$$|\phi^3\rangle = \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{L}\right)^{-\Delta_\gamma} \lim_{z \rightarrow -(i-1)\infty} e^{\frac{(i-1)}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{\sqrt{2}L} z \Delta_\gamma} \phi_\gamma(-(i+1)\infty) |I^{cyl}\rangle.$$

Then, S and T become a three and four-point function on the manifolds below.



Sketch of the proofs II

We can compute the correlation functions by mapping them to the plane.



$$S^* \longrightarrow z = \frac{L}{2\pi} [-\ln(w-i) - i \ln(w+1) + (1+i) \ln w]$$

J: Jacobian

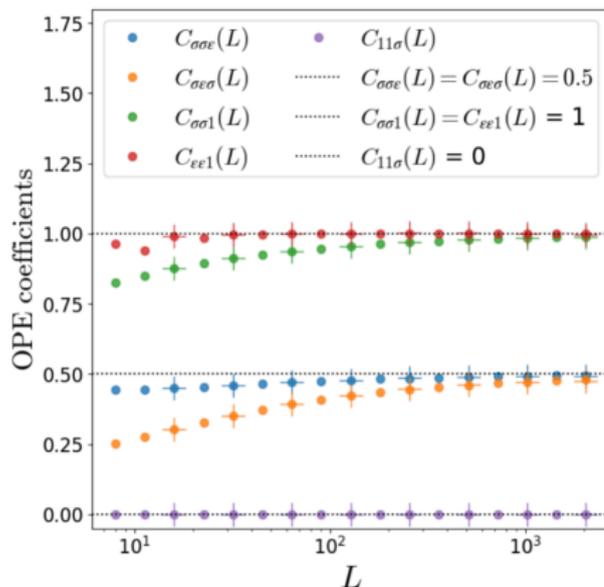
$$S_{\alpha\beta\gamma}/S_{1111} = |J_1|^{\Delta_\alpha} |J_2|^{\Delta_\beta} |J_3|^{\Delta_\gamma} \langle \phi_\alpha(-1) \phi_\beta(i) \phi_\gamma(0) \rangle_{pl},$$

$$T^* \longrightarrow z = \frac{L}{2\pi} [-\ln(w-i) + \log(w+i) - i \ln(w+1) + i \ln(w-1)]$$

$$\frac{T_{\alpha\beta\gamma\delta}}{T_{1111}} = |J_1|^{\Delta_\alpha} |J_2|^{\Delta_\beta} |J_3|^{\Delta_\gamma} |J_4|^{\Delta_\delta} \langle \phi_\alpha(-1) \phi_\beta(i) \phi_\gamma(1) \phi_\delta(-i) \rangle_{pl},$$

テンソル繰り込みの数値計算結果

臨界イジング模型のテンソル繰り込みによって得られた $S_{\alpha\beta\gamma}^*$ と T_{ijkl}^* は我々の理論値とピッタリと一致した。 ("·"TRG($D = 96$), "+"TNR($D = 40$))



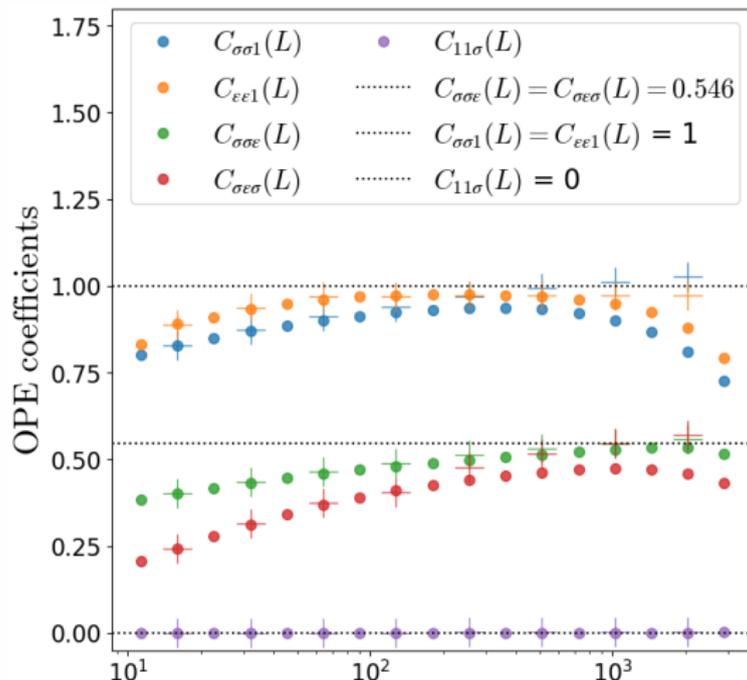
$$C_{\alpha\beta\gamma}(L) = (\sqrt{2}x)^{\Delta_\alpha + \Delta_\beta + \Delta_\gamma} 2^{-\Delta_\gamma} S_{\alpha\beta\gamma}(L)$$

	$T_{ijkl}(L = 2048)$	$\langle \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \rangle$
1111	1	1
$\sigma\sigma\sigma\sigma$	0.610	0.645
$\sigma\sigma\epsilon\epsilon$	0.0714	0.0716
$\sigma\epsilon\sigma\epsilon$	0.000	0
$\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon$	0.0168	0.0168
$\sigma\sigma\epsilon 1$	0.0618	0.0765
$\sigma\epsilon\sigma 1$	0.133	0.140
$\sigma\sigma\sigma 1$	0.000	0
$\epsilon\epsilon\epsilon 1$	0.0008	0
$\sigma\sigma 11$	0.708	0.736
$\sigma 1\sigma 1$	0.638	0.675
$\epsilon\epsilon 11$	0.0863	0.0864
$\epsilon 1\epsilon 1$	0.0439	0.0432
$\epsilon\sigma 11$	0.000	0

我々の式を使えば、OPE や四点関数をテンソル要素から直接読み取れる。

おまけ:3 状態ポッツ

3 状態ポッツの非自明な OPE 係数も計算できた。Evenbly-TNR が outperform している。



- ① 背景
- ② 結合定数の計算
- ③ 有限バンド次元効果とは
- ④ 固定点テンソルへの場の理論的アプローチ
- ⑤ まとめ

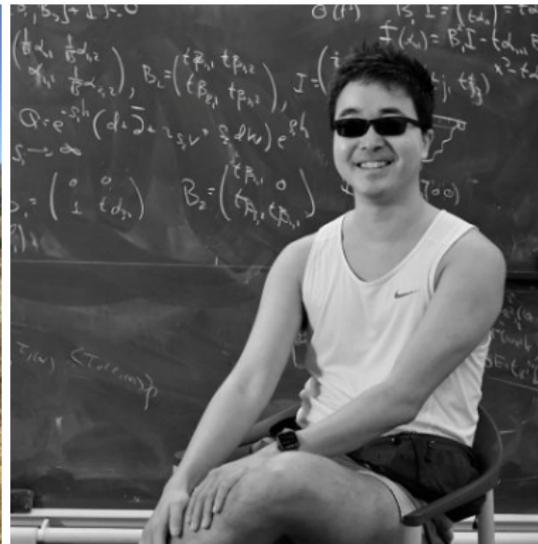
概要

- 格子模型から場の理論の結合定数をテンソル繰り込みを用いて精密に計算することができる。
- 有限ボンド次元効果は relevant perturbation
- 臨界現象の固定点テンソルは CFT の四点相関関数でシンプルに書ける。

Future direction

- Showing the instability of *critical* fixed-points using tensor network representations
- Understanding finite-bond dimension effects
- Applying our methods to lattice gauge theories
- Visualizing RG flow of higher dimensions
- Characterizing the phase transitions of non-equilibrium physics

Acknowledgments



THE INSTITUTE FOR
SOLID STATE PHYSICS
THE UNIVERSITY OF TOKYO

