

ハミルトニアン形式を用いた格子ゲージ理論

日高義将
(KEK)

共同研究者: 早田智也(慶応)
西村健太郎(KEK)

Based on

Hayata, YH, Phys. Rev. D 103 (2021) 9, 094502, 2305.05950, 2306.12324

Hayata, YH, Kikuchi Phys. Rev. D 104 (2021) 7, 074518

Hayata, YH, Nishimura, 2311.xxxxx

動機

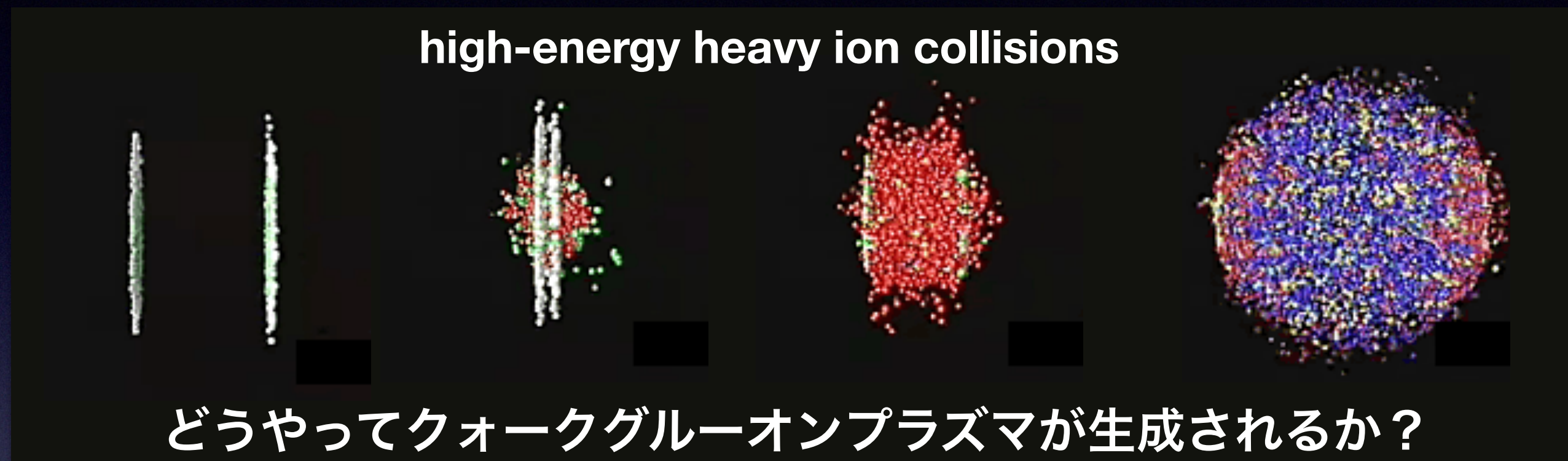
$$i\partial_t |\Psi\rangle = H_{\text{QCD}} |\Psi\rangle$$

を解きたい！

動機

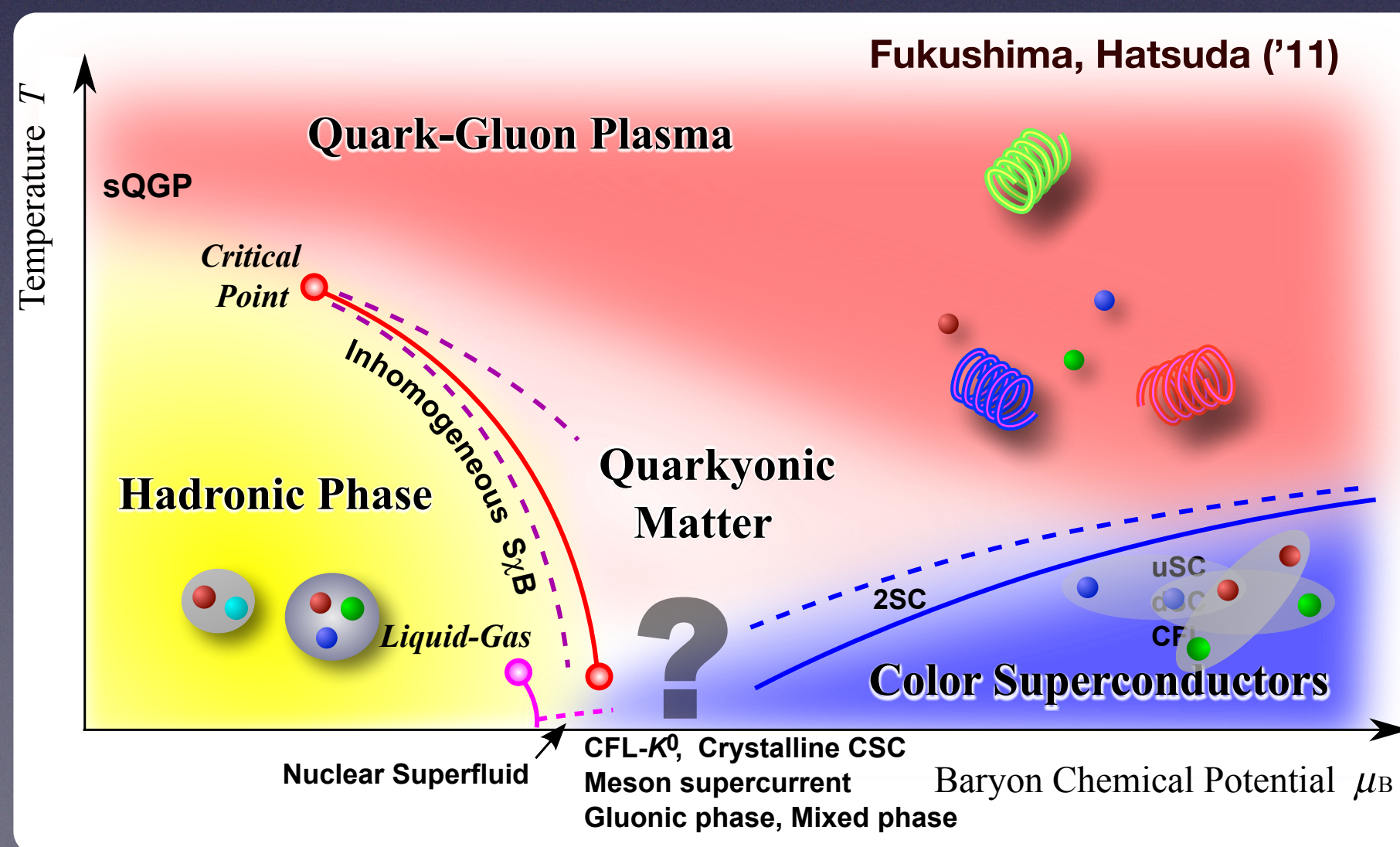
QCDの大きな未理解問題

QCDの多体系の
実時間発展

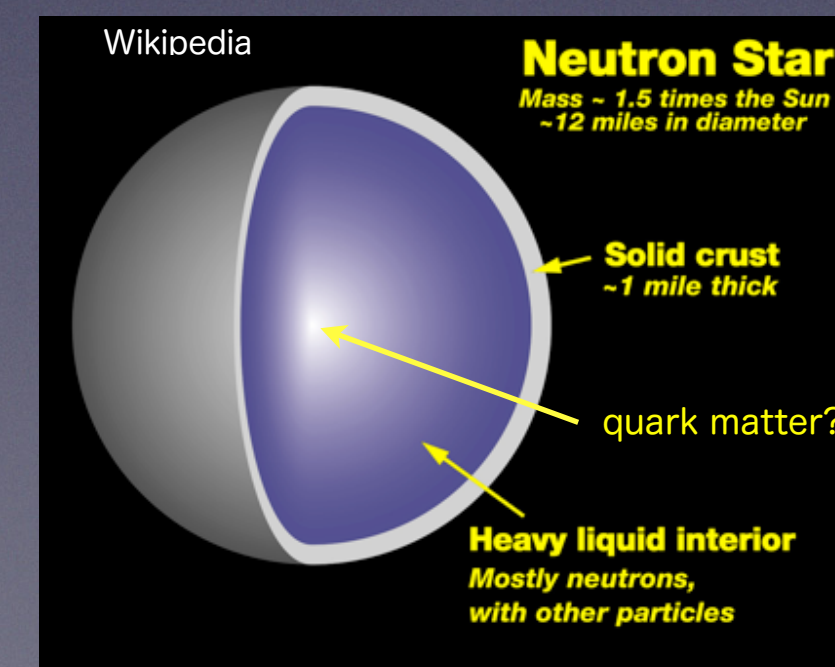


BNLのホームページより

高密度QCD



中性子星の内部では
どんな状態が
実現しているか？



困難

符号問題: importance samplingに
基づいた第一原理計算の困難

$$\langle O \rangle = \int \mathcal{D}A \det(D + m) e^{iS} O$$

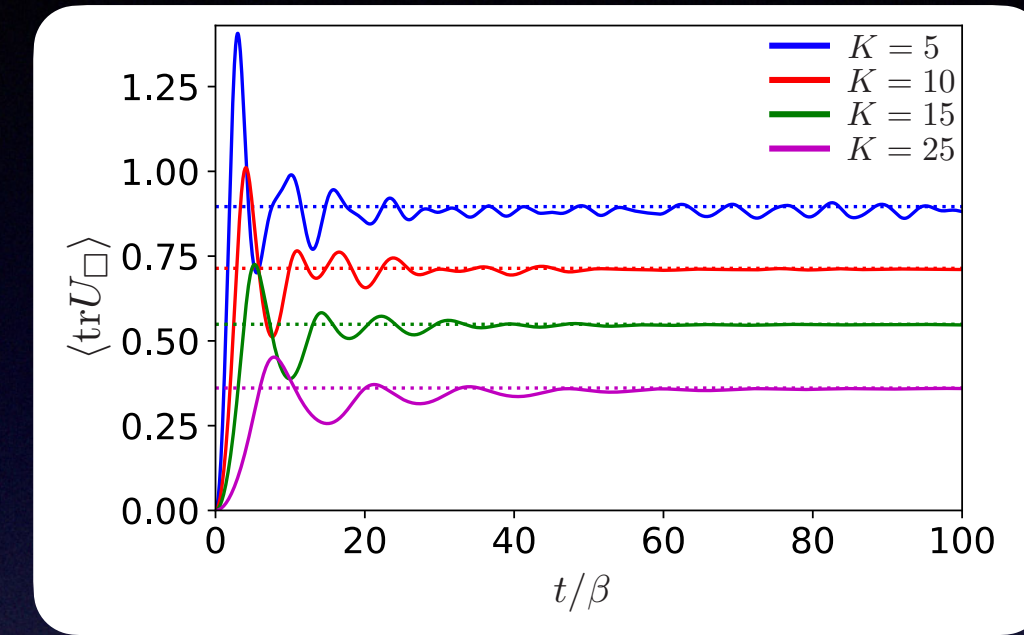
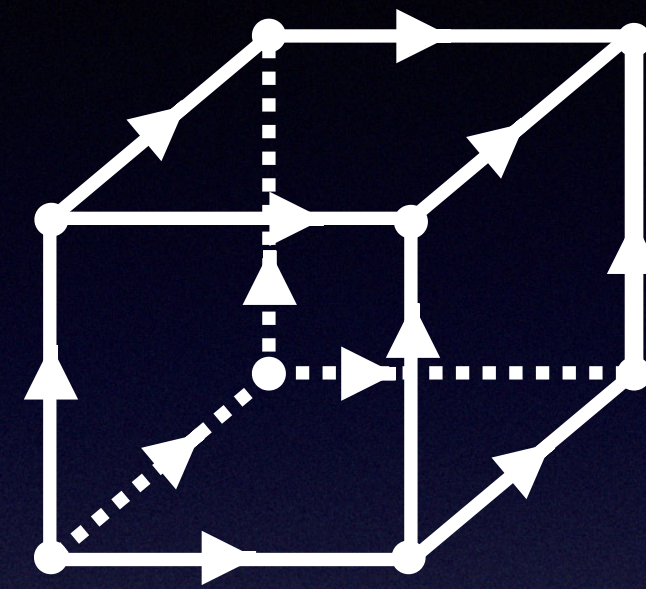
実時間, 有限密度の問題では複素
なため確率分布とみなせない

$$\not\approx \frac{1}{N} \sum_j O_j$$

ハミルトニアン形式を使ったアプローチ

Schrodinger方程式を直接解いて符号問題回避

小さい系なら直接
ミュレーション可能

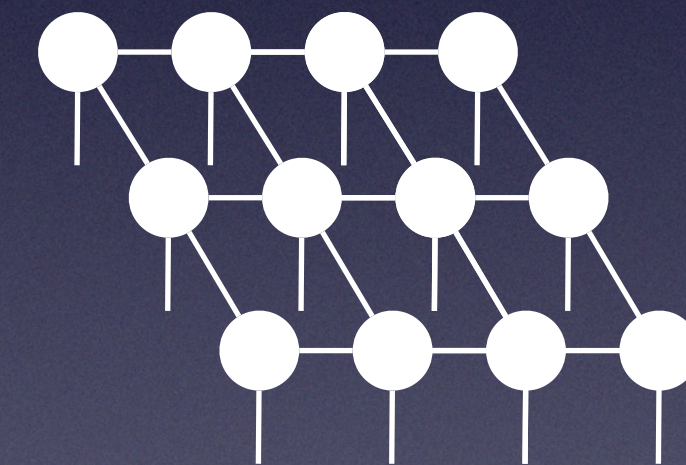


テンソルネットワークを
使った手法

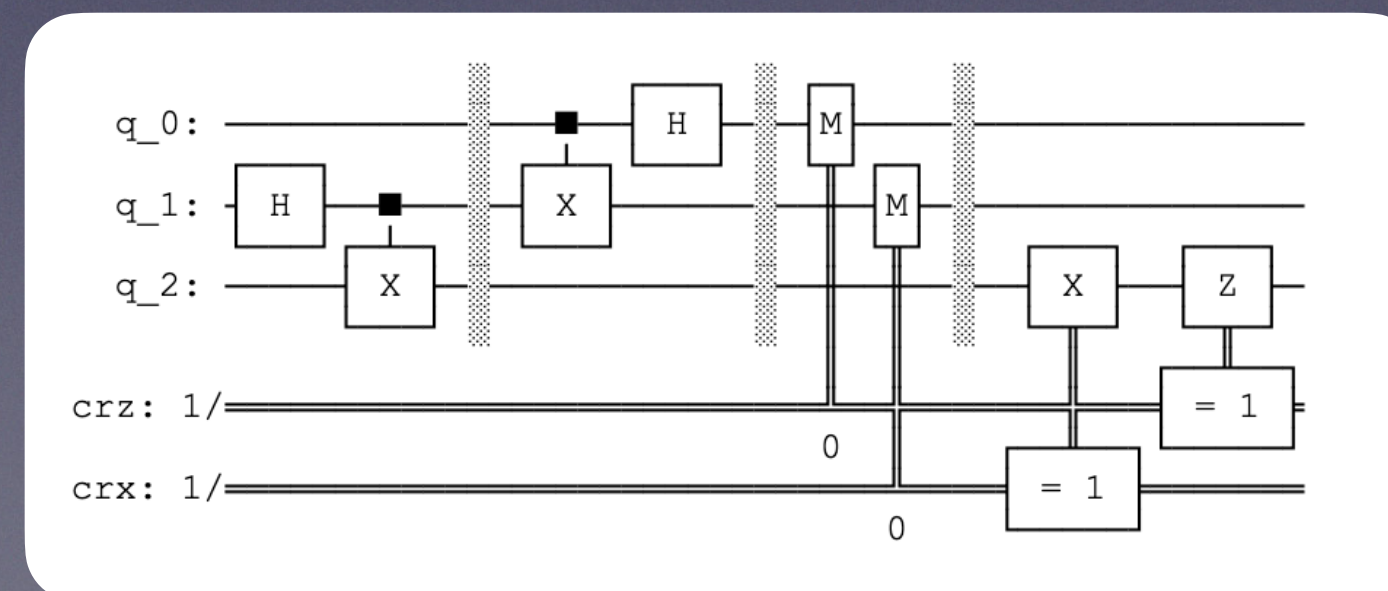
MPS



TPS, PEPS



量子コンピュータでの
シミュレーション



ハミルトニアン形式を使ったアプローチ

ゲージ理論での困難

Link変数が連続変数

⇒自由度無限大
(正則化が必要)

$$U \in SU(N)$$

連続空間

ゲージ対称性と相性の
良い近似法は？

ゲージ対称性に起因した
大きい余分な自由度

$$\dim \mathcal{H}_{\text{phys}} \ll \dim \mathcal{H}_{\text{total}}$$

Gauss law constraintを解く必要性

目次

●基礎編

Kogut-Susskindのハミルトニアン形式

ゲージ自由度の消去 (スピンネットワーク)

有限自由度への正則化法 (量子群変形)

●応用編

(2 + 1)次元 $SU(3)_k$ ゲージ理論の量子相転移

(1 + 1)次元QCDの有限密度系の解析

(3 + 1)次元小さい系でのYang-Mills理論の熱化

●まとめ

$SU(N)$ ゲージ理論 ($A_0 = 0$ ゲージ)

正準交換関係

$$[A_n^i(x), E_{mj}(x')] = i\delta_{nm}\delta_j^i\delta(x-x')$$

ゲージ場 電場

ハミルトニアン

$$H = \int d^3x \left(\frac{g^2}{2} E^2(x) + \frac{1}{2g^2} B^2(x) \right)$$

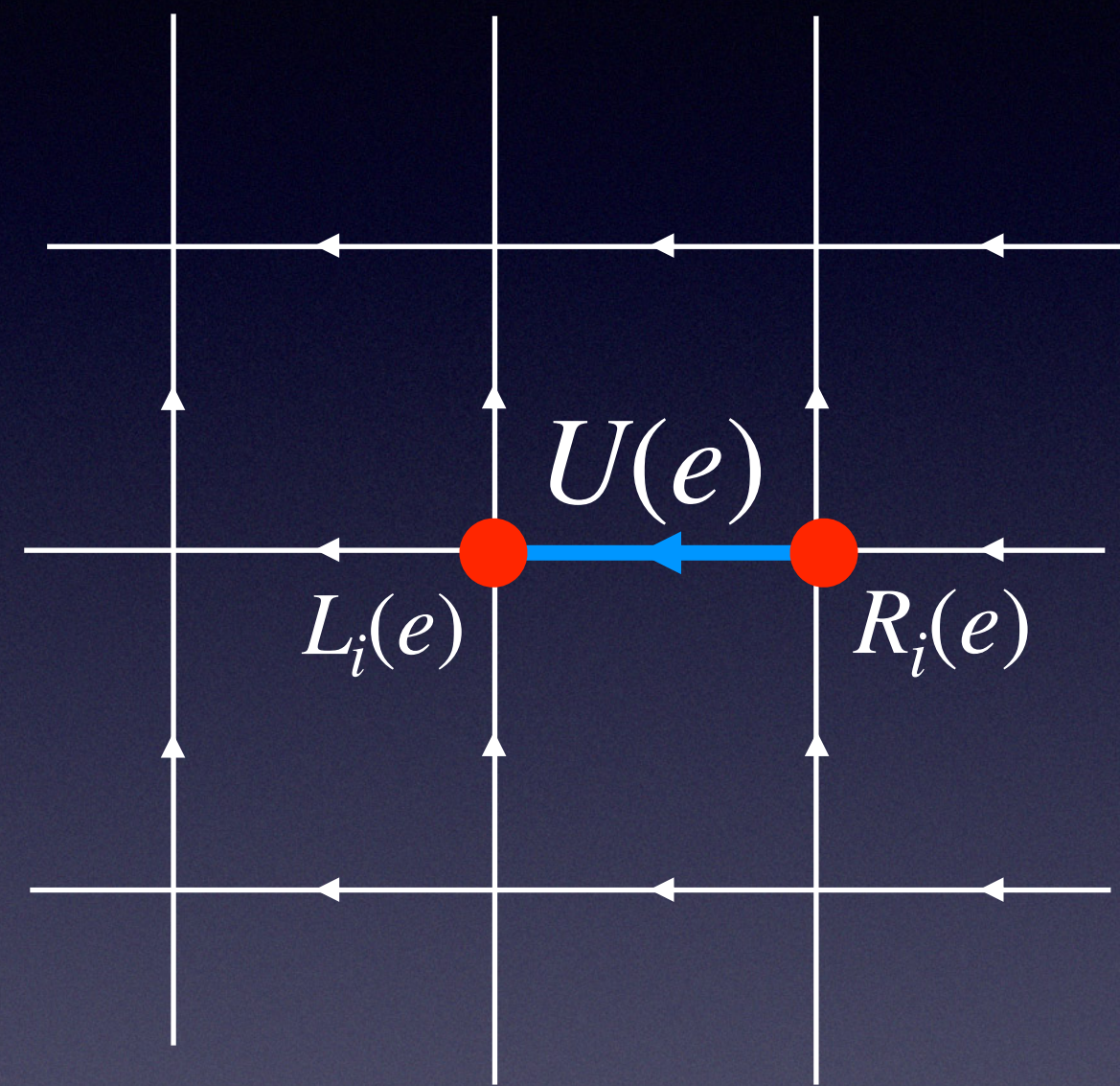
磁場 $B_l^i = \frac{1}{2}\epsilon_{lnm}(\partial_m A_n^i - \partial_m A_n^i + f_{jk}^i A_m^j A_n^k)$

Gauss law 拘束条件 $(D \cdot E)^i |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0$

Kogut-Susskind Hamiltonian 形式

Kogut, Susskind, Phys. Rev. D 11, 395 (1975)

時間は連続, 空間を離散化



$e^{i\int A} \rightarrow U(e)$: 辺 e 上のリンク変数 $\in \text{SU}(N)$

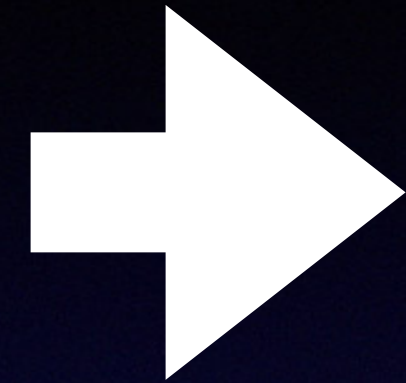
$L_i(e), R_i(e)$: 辺の始点, 終点上の電場 $\in \text{su}(N)$

$L_i(e)$ と $R_i(e)$ は, 独立でない

$$[U_{\text{adj}}(e)]_i^j L_j(e) = R_i(e) \quad \longrightarrow \quad R_i^2(e) = L_i^2(e) =: E_i^2(e)$$

交換関係

$$[A_n^i(x), E_{mj}(x')] = i\delta_{nm}\delta_j^i\delta(x-x')$$

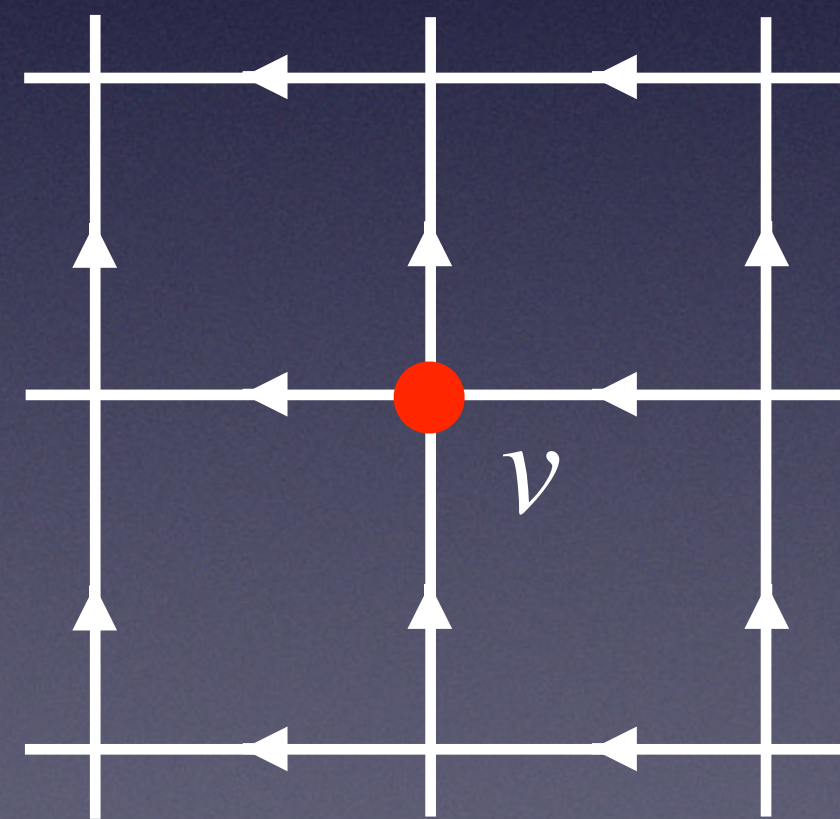


$$[R_i(e), U(e')] = U(e)T_i\delta_{e,e'}$$

$$[L_i(e), U(e')] = T_iU(e)\delta_{e,e'}$$

$$[L_i(e), L_j(e')] = -if_{ij}^k L_k(e)\delta_{e,e'}$$

$$[R_i(e), R_j(e')] = if_{ij}^k R_k(e)\delta_{e,e'}$$



ガウスの拘束条件 $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})^i |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0$

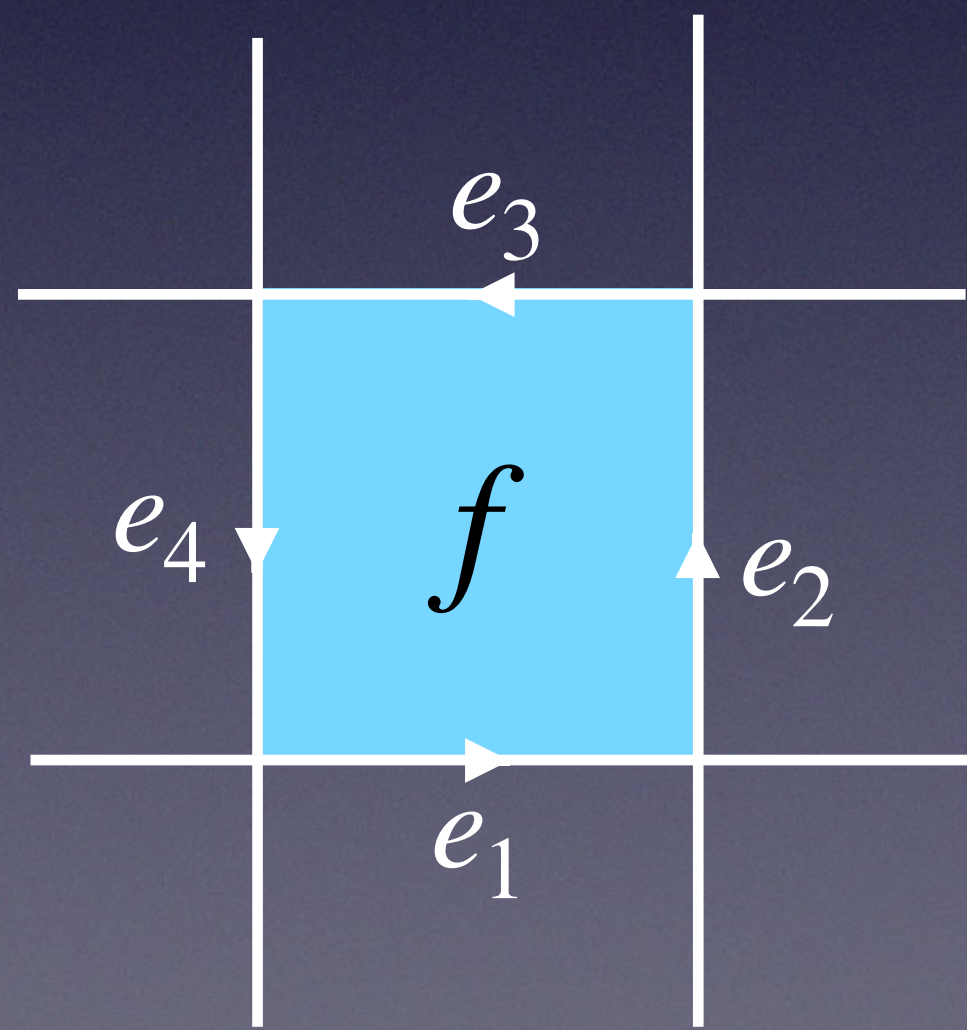
$$\left(\sum_{e \in C_1 | s(e)=v} R_i(e) - \sum_{e \in C_1 | t(e)=v} L_i(e) \right) |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0$$

C_1 : 辺の集合, s, t : 辺の始点, 終点を取る関数

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} \sum_{e \in C_1} (E(e))^2 - \frac{K}{2} \sum_{f \in C_2} (\text{tr}U(f) + \text{tr}U^\dagger(f))$$

C_2 :面の集合



$$U(f) := U(e_4)U(e_3)U(e_2)U(e_1)$$

具体的に解くためには,

- 基底構成する
- Gauss law 拘束条件を解いて物理状態の基底を構成する
⇒SU(2)の場合はスピンネットワーク
- スピンネットワークへの演算子の作用を計算
- ゲージ対称性を尊重した有限自由度近似

2種類の基底:磁氣的基底, 電氣的基底

磁氣的基底(Wilson lineの固有状態)

$$[U_a]_n^m |g\rangle = [\rho_a]_n^m(g) |g\rangle \quad g \in \text{SU}(2)$$

表現 a のWilson line 表現行列

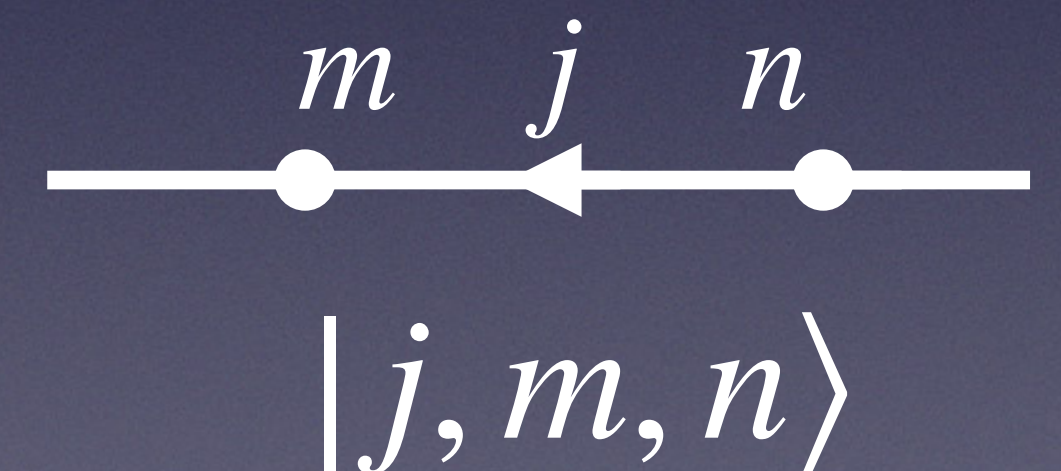
電場の固有状態

$$R_i^2(e) |j, m, n\rangle = C_2(j) |j, m, n\rangle$$

Casimir $C_2(j) = j(j+1)$

$$R_3(e) |j, m, n\rangle = n |j, m, n\rangle$$

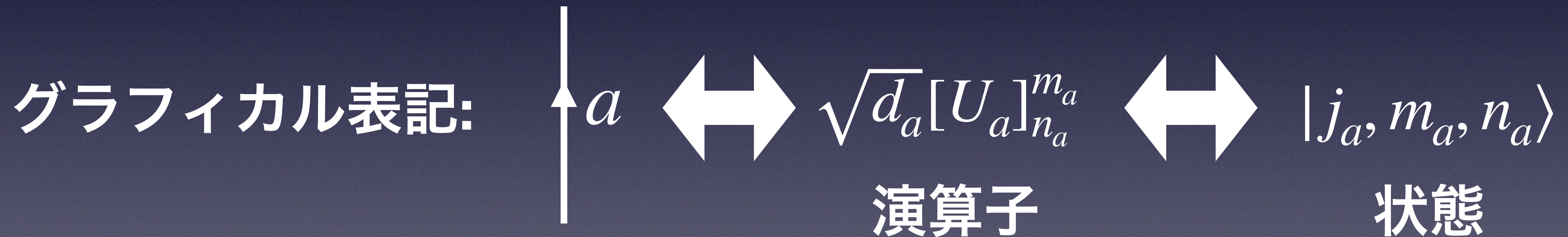
$$L_3(e) |j, m, n\rangle = m |j, m, n\rangle$$



状態はWilson lineで生成できる

$$\sqrt{d_a} [U_a]_{n_a}^{m_a} |0,0,0\rangle = |j_a, m_a, n_a\rangle$$

$$d_a = 2j_a + 1 \quad \text{量子次元}$$

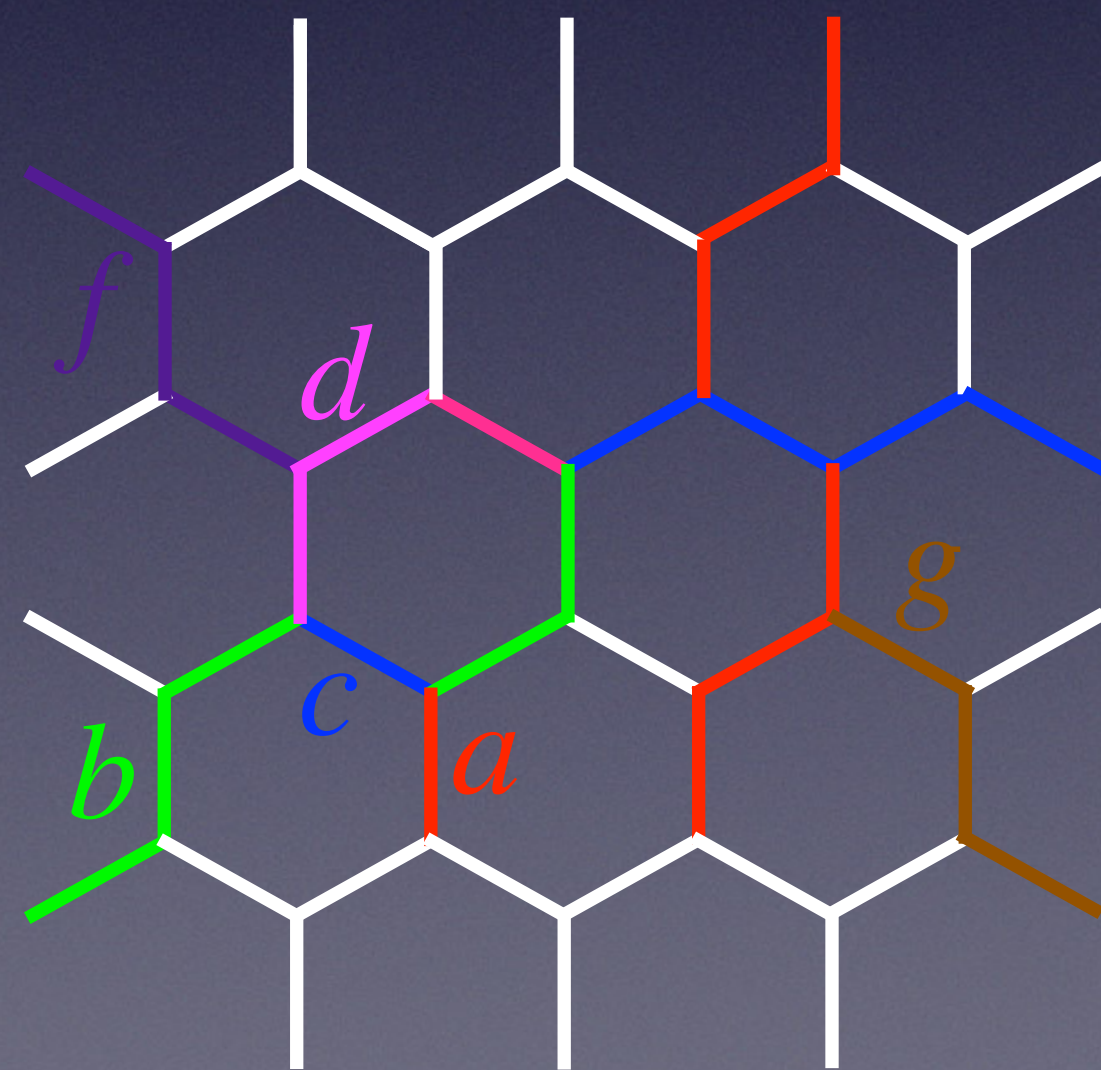


物理状態: スピンネットワーク

Gaussの拘束条件: 各頂点でSU(2)不変


$$\sum_{n_a, n_b, m_c} \frac{1}{\sqrt{d_c}} \langle j_a n_a j_b n_b | j_c m_c \rangle |j_a, m_a, n_a\rangle |j_b, m_b, n_b\rangle |j_c, m_c, n_c\rangle$$

Clebsch-Gordan係数



物理状態: 3点頂点を持つスピンネットワーク

辺に角運動量のラベル

各頂点は三角不等式を満たす

状態はWilson lineで生成可

⇒Wilson lineのネットワーク

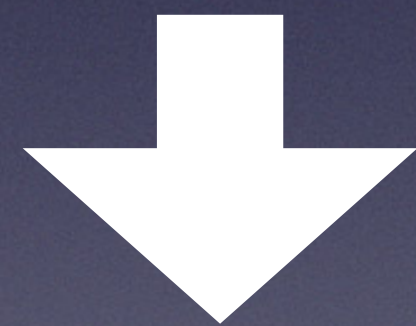
物理量: 電場とWilson lineで構成

状態: Wilson lineで生成

Wilson lineの合成規則がわかると

演算子の状態への作用が決まる

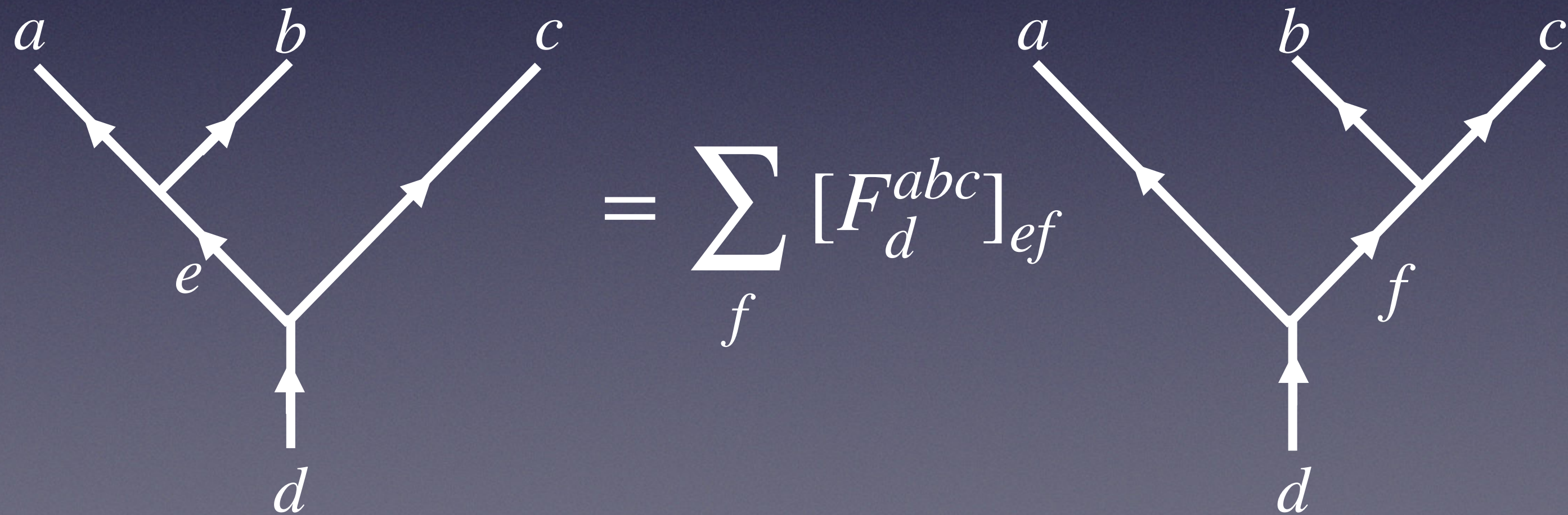
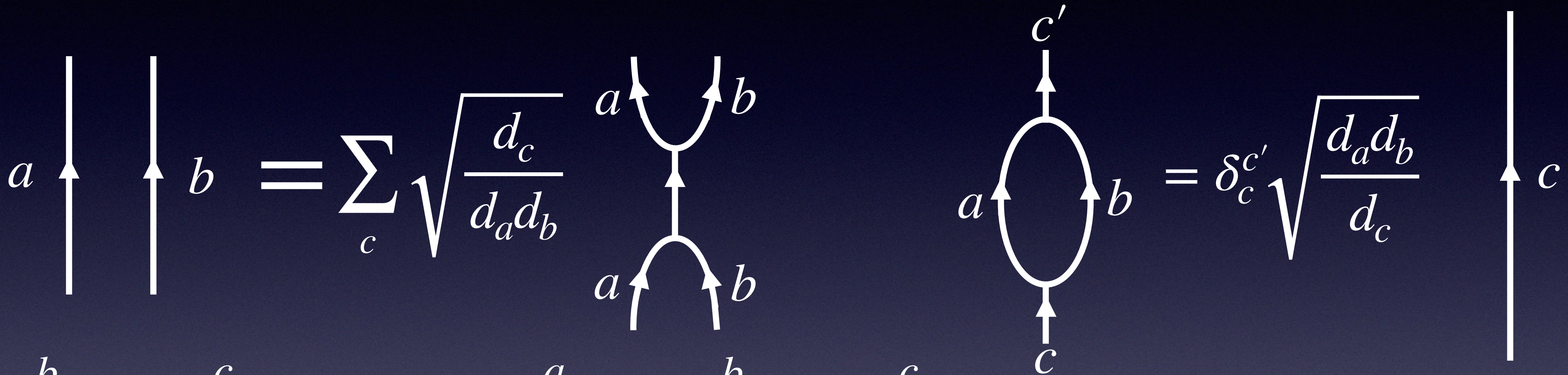
$$[U_a]_{n_a}^{m_a} [U_b]_{n_b}^{m_b} = \sum_{j_c, m_c, n_c} \langle j_a m_a j_b m_b | j_c, m_c \rangle \langle j_c, n_c | j_a n_a j_b n_b \rangle [U_c]_{n_c}^{m_c}$$



$$a \uparrow \quad b \uparrow = \sum_c \sqrt{\frac{d_c}{d_a d_b}} \begin{array}{c} a \quad b \\ \cup \\ c \uparrow \\ \cap \\ a \quad b \end{array}$$

ネットワークの合成規則

融合ルール: $a \times b = \sum_c N_{ab}^c c$ $N_{ab}^c = \delta_{abc} = \begin{cases} 1 & |j_a - j_b| \leq j_c \leq j_a + j_b, j_a + j_b + j_c \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

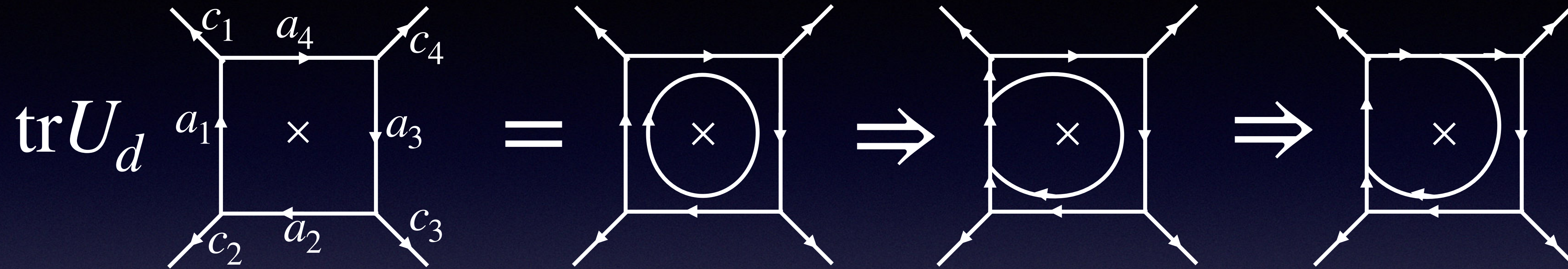


Wigner 6-j symbol

$$[F_d^{abc}]_{ef} = (-1)^{j_a + j_b + j_c + j_d} \sqrt{d_e d_f} \begin{Bmatrix} j_a & j_b & j_e \\ j_c & j_d & j_f \end{Bmatrix}$$

+ 無矛盾条件

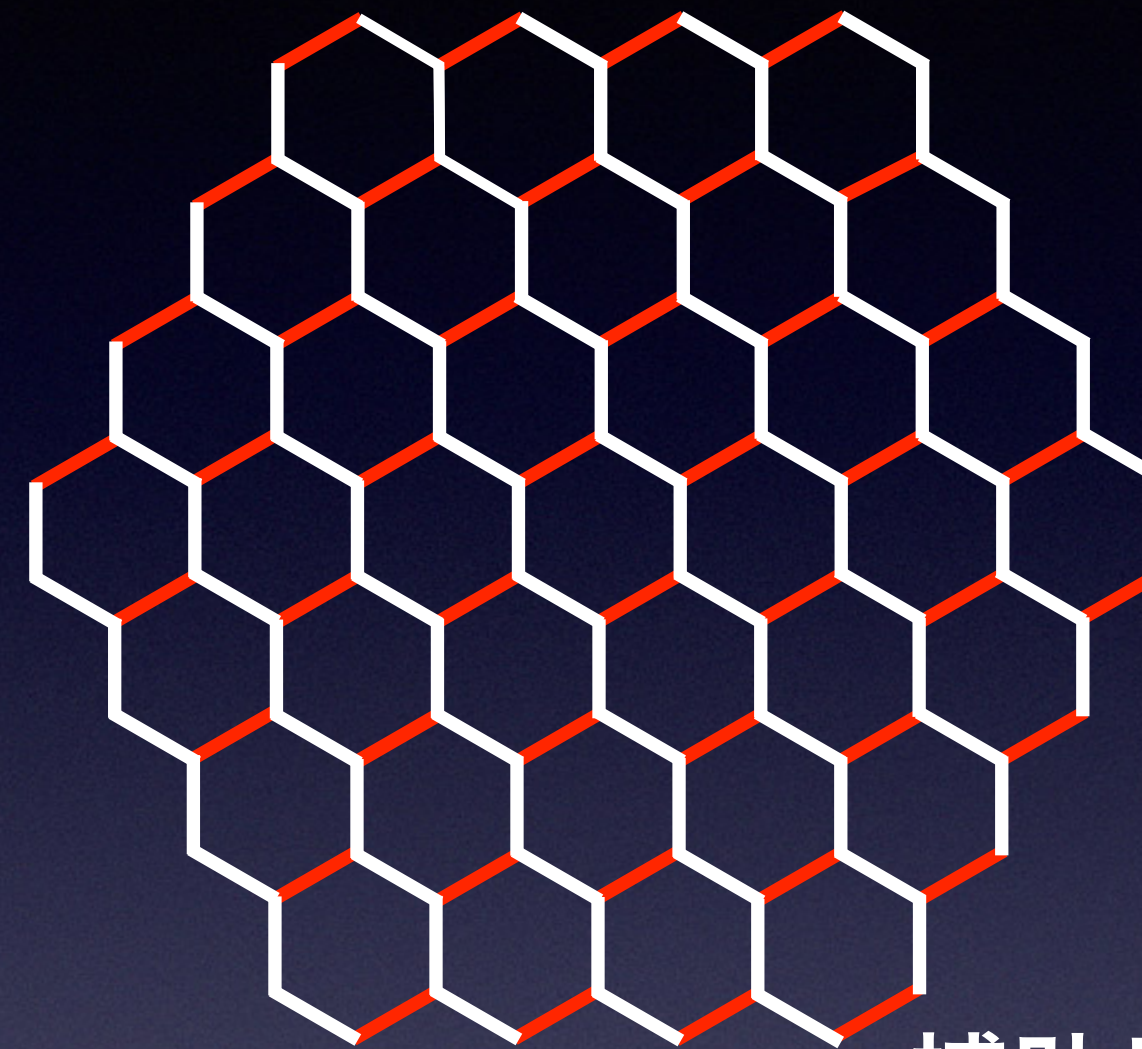
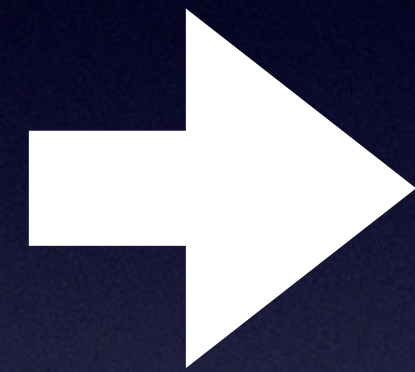
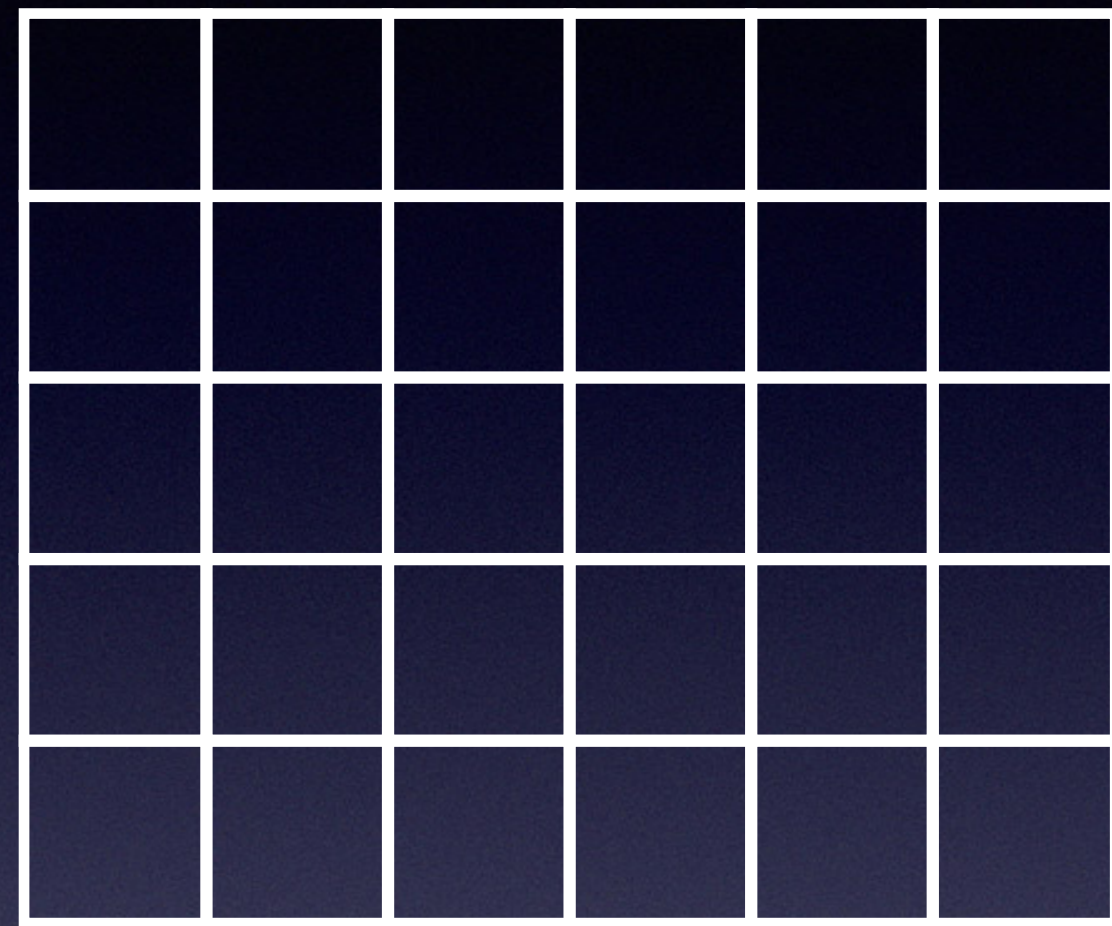
ネットワークへのWilson loopの作用



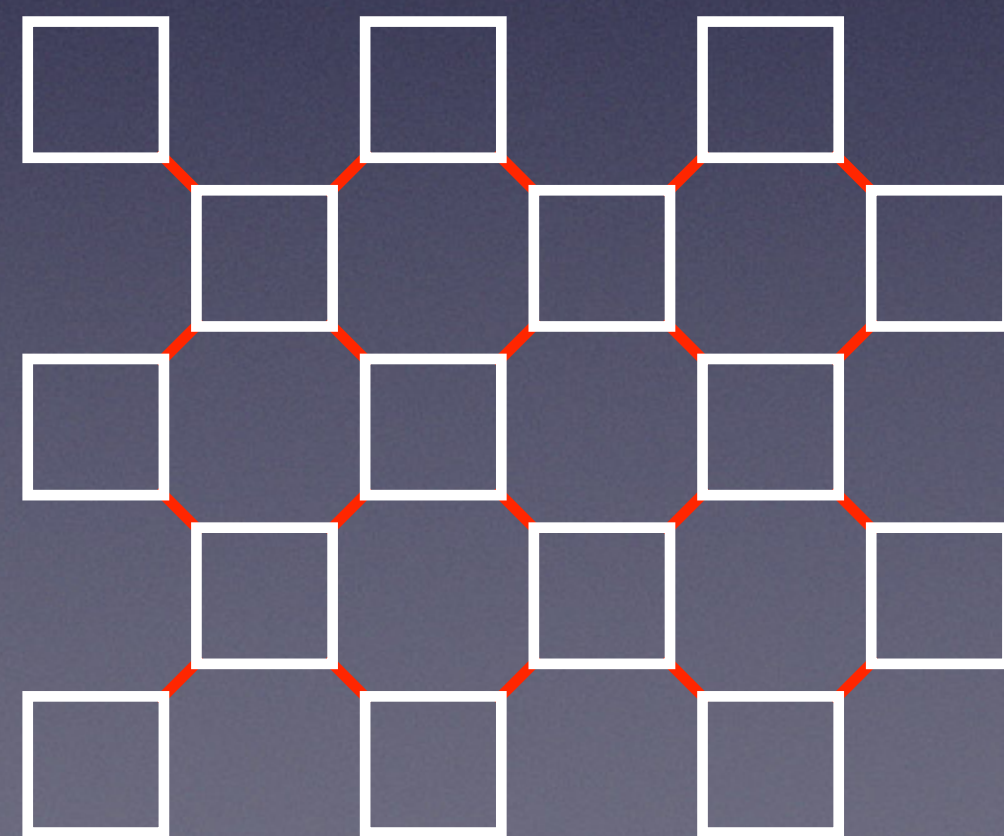
The diagram shows the expansion of the Wilson loop into a sum over internal indices b_i . The square has edges labeled b_1, b_2, b_3, b_4 and external legs labeled c_1, c_2, c_3, c_4 . A semi-circular Wilson loop is shown on the left side.

$$= \prod_{i=1}^4 \sum_{b_i} [F_{b_i}^{c_i a_{i-1} d}]_{a_i b_{i-1}}$$

正方格子の取り扱い



補助リンク



別の補助リンクの入れ方

ネットワークの合成ルールにより
行列要素が補助リンクの入れ方によらない

表現のラベルによる正則化

合成ルールを満たすように表現の最大値を

整数 k でカットオフ $j \leq k/2$

⇒量子群 $SU(2)_k$

実用上は, (半)整数 n を $[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{k+2} n}{\sin \frac{\pi}{k+2}}$ に置き換えればOK

e.g., $C_2(j) = [j][j+1]$

ネットワークの合成ルールはFusion圏

スピンネットワークは非局所的で使いにくい

状態に三角不等式を課さない

代わりにハミルトニアンにペナルティ項を入れる。

$$\delta_{abc} = \begin{cases} 1 & |j_a - j_b| \leq j_c \leq j_a + j_b, j_a + j_b + j_c \in \mathbb{Z} \text{かつ } j_a + j_b, j_a + j_b + j_c \leq k/2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とし $Q|j_a, j_b, j_c\rangle = \delta_{abc}|j_a, j_b, j_c\rangle$ とする

$$H \rightarrow H - t \sum_{v \in C_0} Q_v \quad \text{と置き換えて } t \rightarrow \infty \text{ を考える}$$

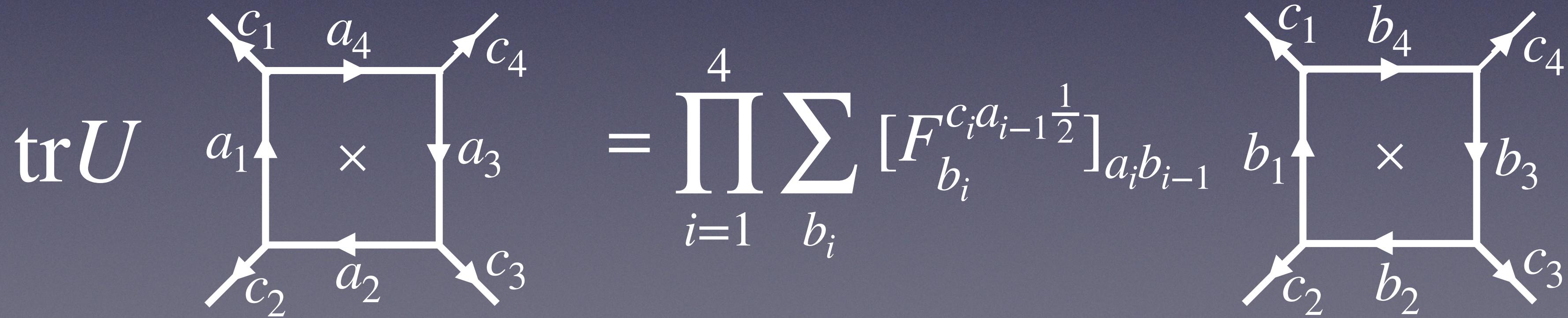
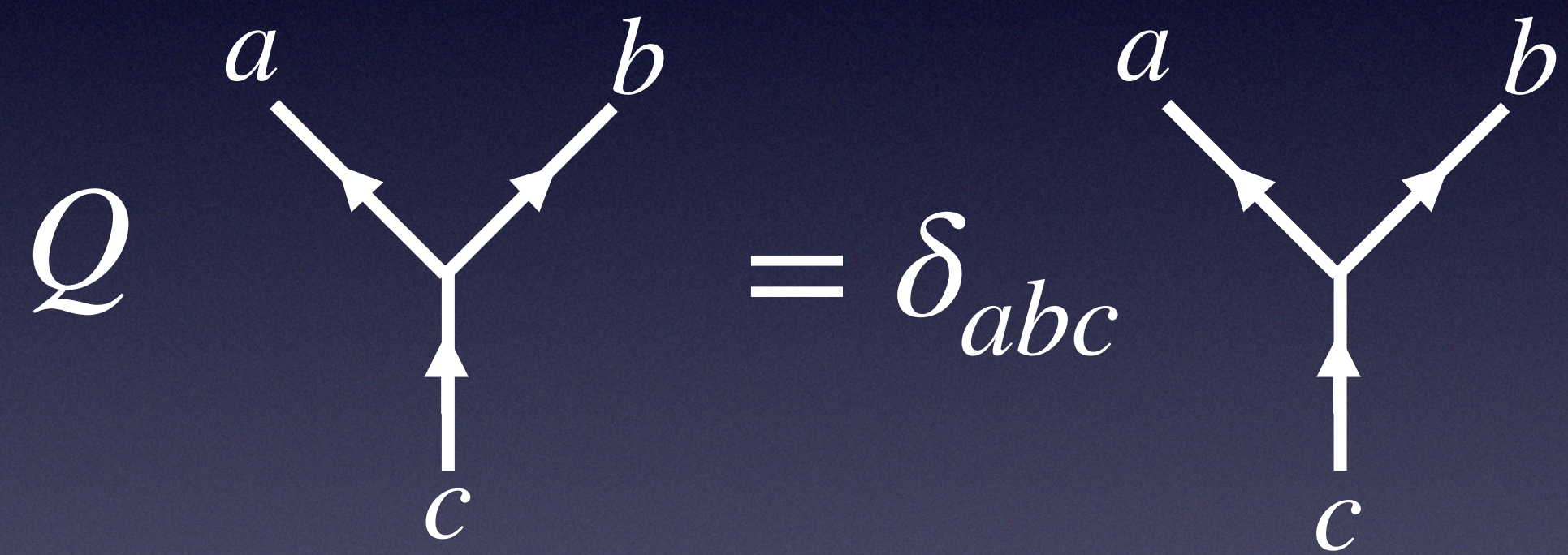
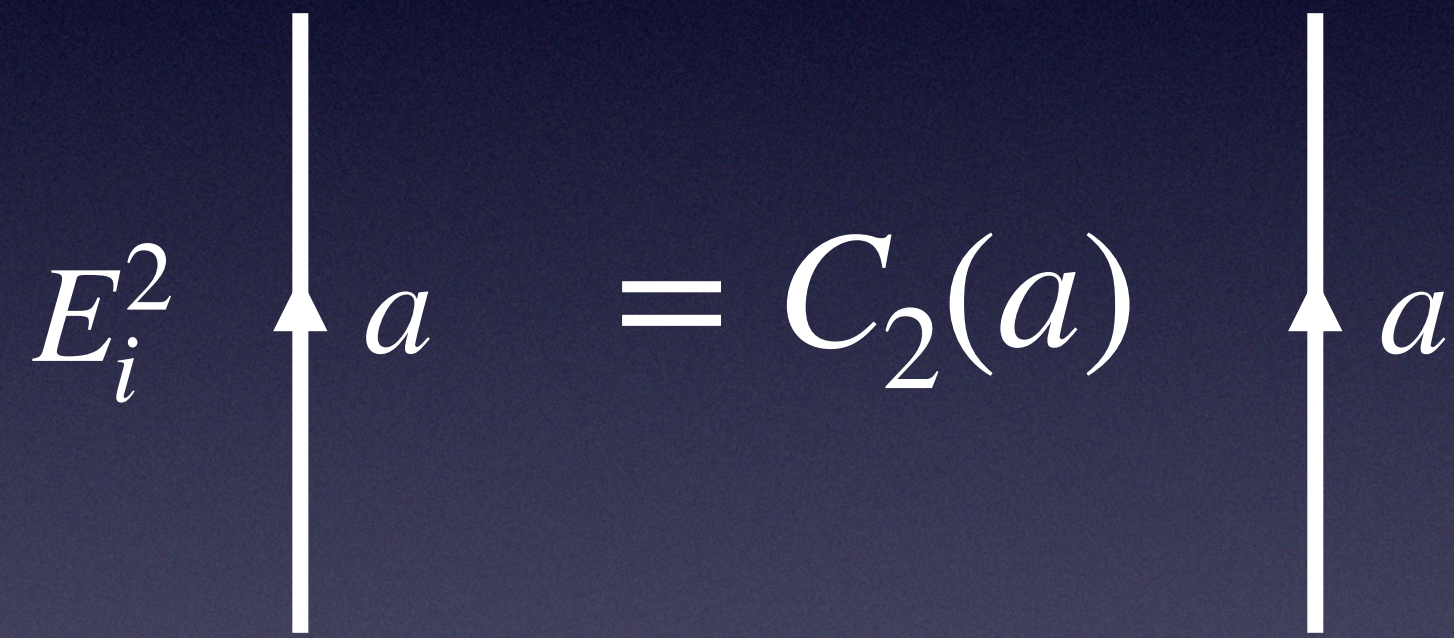
頂点の集合

$SU(2)_k$ Yang-Mills理論のスピンモデルによる表現

辺に自由度: $j = 0, 1/2, \dots, k/2$

ハミルトニアン $H = \frac{1}{2} \sum_{e \in C_1} (E_i(e))^2 - K \sum_{f \in C_2} \text{tr} U(f) - t \sum_{v \in C_0} Q(v)$

状態への作用



$SU(3)_k$ Yang-Mills理論

ひとつの違いはmultiplicity N_{ab}^c

例:

$SU(2)_k$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{5}$$

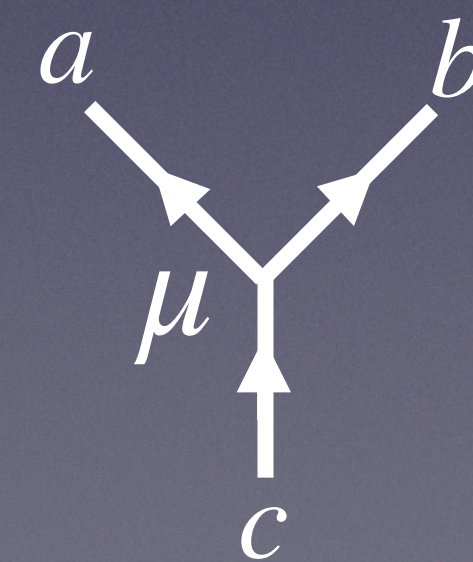
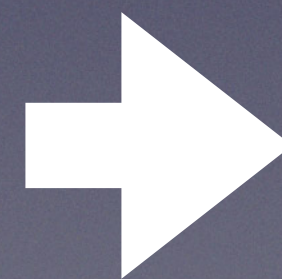
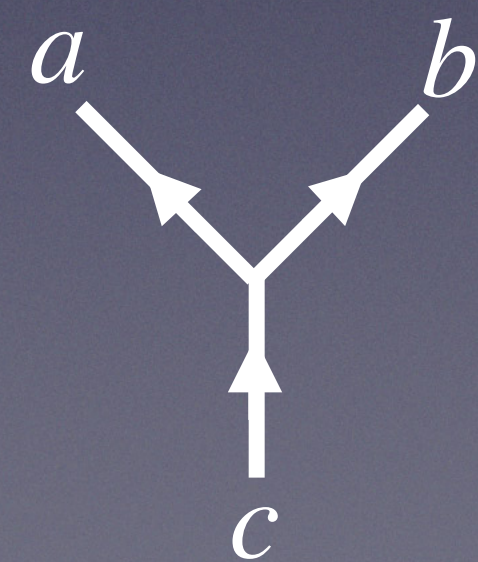
$$N_{33}^a = 0 \text{ or } 1$$

$SU(3)_k$

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{27}$$

$$\Rightarrow N_{88}^8 = 2$$

状態を指定するラベルが $SU(3)_k$ の場合には増える



SU(3)_kのネットワークの代数

$$\begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ b \end{array} = \sum_{c,\mu} \sqrt{\frac{d_c}{d_a d_b}} \begin{array}{c} a \quad b \\ \searrow \quad \swarrow \\ \mu \\ \uparrow \\ \mu \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad b \end{array} = \delta_c^{c'} \delta_\mu^{\mu'} \sqrt{\frac{d_a d_b}{d_c}} \begin{array}{c} c' \\ \uparrow \\ \mu' \\ \uparrow \\ \mu \\ \downarrow \\ c \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ c \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \searrow \quad \swarrow \\ \mu \\ \uparrow \\ e \\ \swarrow \quad \searrow \\ \nu \\ \uparrow \\ d \end{array} = \sum_{f,\rho,\sigma} [F_d^{abc}]_{(e,\mu,\nu)(f,\rho,\sigma)} \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \searrow \quad \swarrow \quad \nearrow \\ \sigma \\ \uparrow \\ d \end{array} \begin{array}{c} \rho \\ \uparrow \\ f \end{array}$$

+無矛盾条件

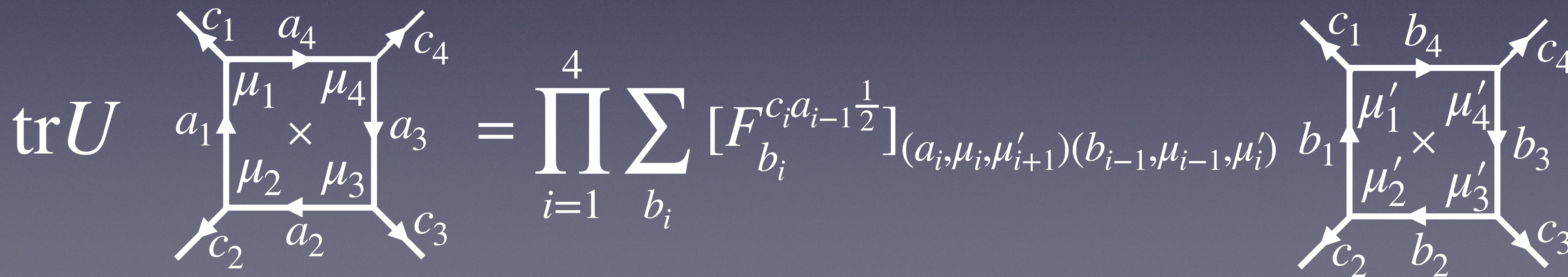
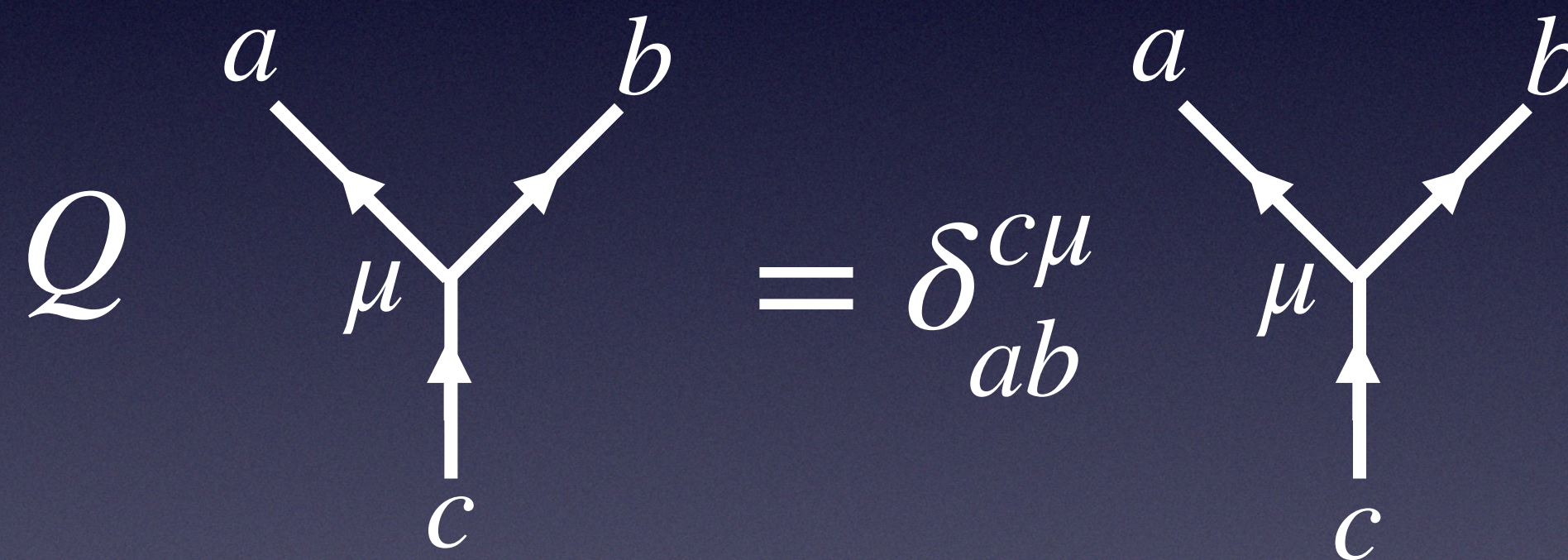
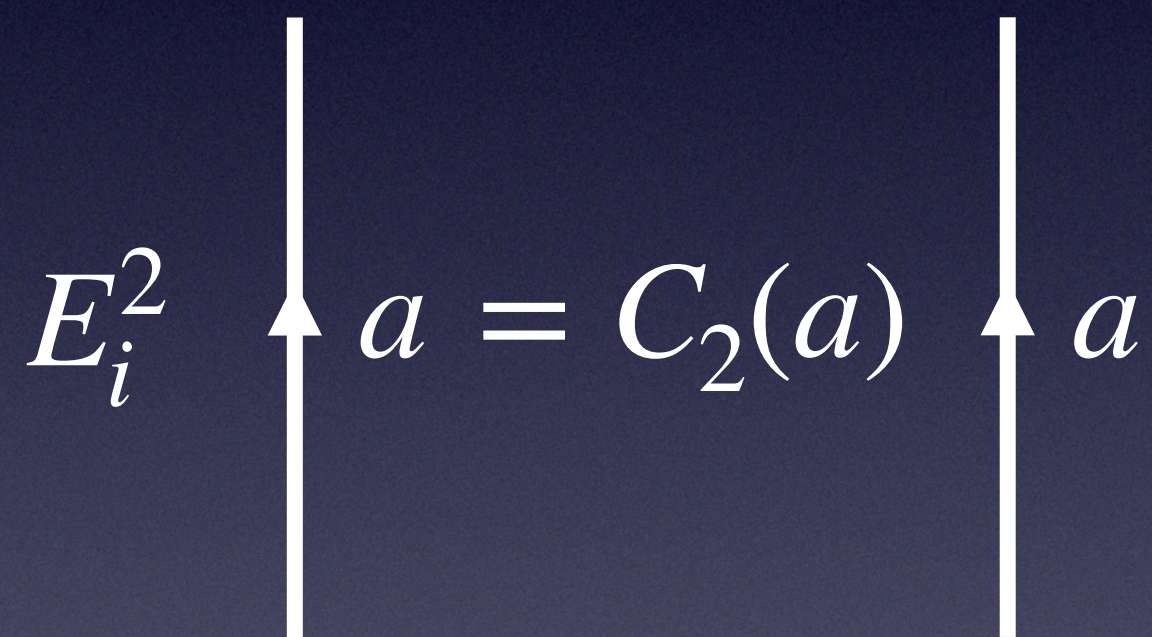
SU(3)_kのF symbolの一般的な具体形は知られていないと思う。

$SU(3)_k$ Yang-Mills スピン模型

ハミルトニアン $H = \frac{1}{2} \sum_{e \in C_1} (E(e))^2 - \frac{K}{2} \sum_{f \in C_2} (\text{tr}U(f) + \text{tr}U^\dagger(f)) - t \sum_{v \in C_0} Q(v)$

set of edges
set of faces
set of vertices

状態への作用



応用編

(2 + 1)次元SU(3)_kゲージ理論

Hayata, YH, JHEP 09, 123 (2023)

(1 + 1)次元 QCDの有限密度計算

Hayata, YH, Nishimura, 2311.xxxxx

(3 + 1)次元 Yang-Mills理論の熱化

Hayata, YH, Phys. Rev. D 103, 094502 (2021)

(2 + 1)次元SU(3)_kゲージ理論

平均場近似の元での閉じ込め非閉じ込め相転移

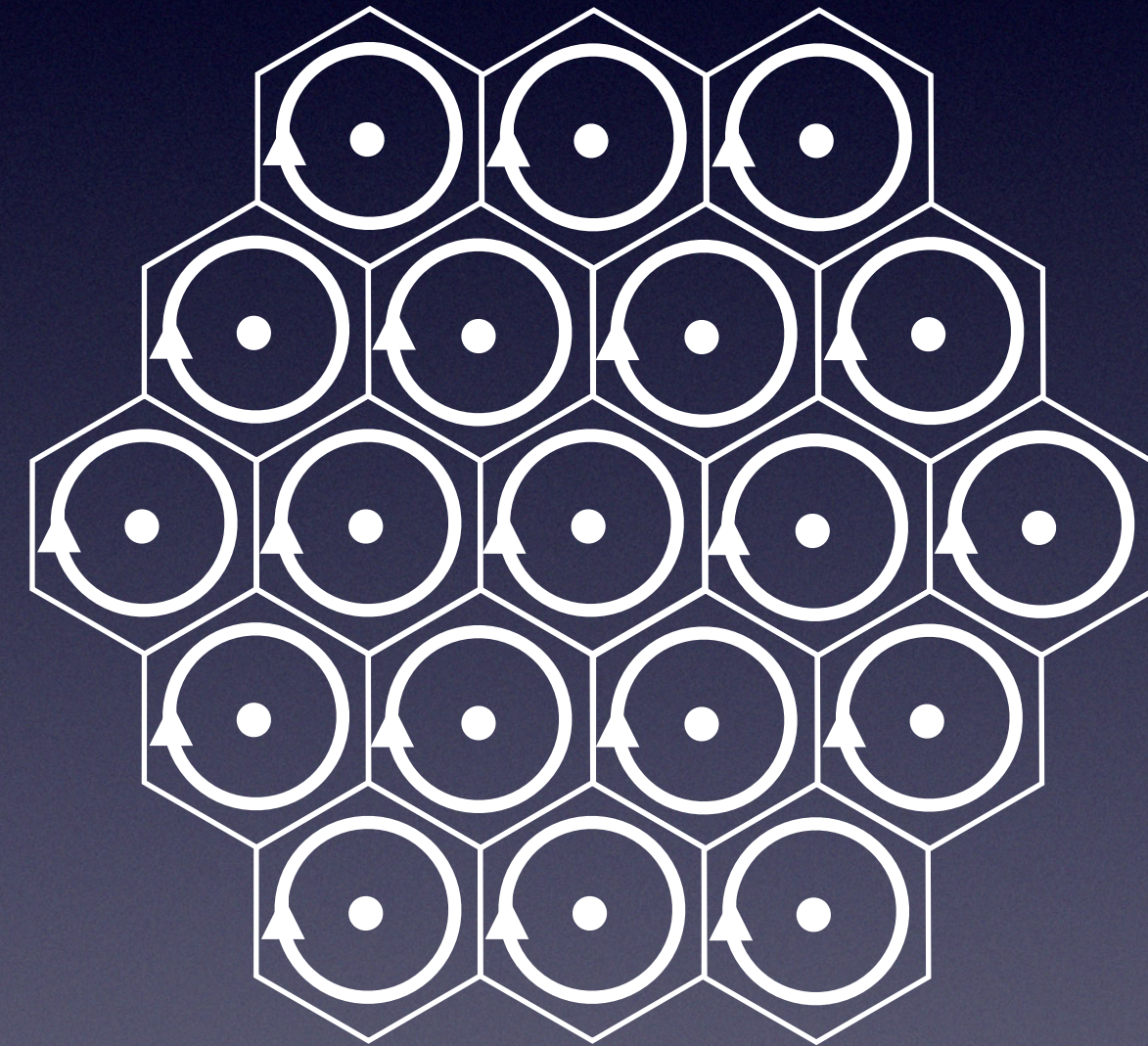
変分波動関数

Dusuel, Vidal, Phys. Rev. B 92 (2015) 12, 125150, Zache, González-Cuadra, Zoller, 2304.02527, Hayata, YH, 2306.12324

$$|\Psi\rangle = \prod_{f \in \mathcal{F}} \sum_{a_f} \psi(a_f) \text{tr} U_{a_f}(f) |0\rangle$$

グラフィカルな表現

$$\prod_{f \in \mathcal{F}} \text{tr} U_{a_f}(f) |0\rangle =$$



エネルギーの期待値を最小化するように波動関数を選ぶ

開放端境界条件, 無限体積

$$E = \min_{\psi} \langle \Psi | H | \Psi \rangle$$

物理量は波動関数を与えると解析的

Hayata, YH, JHEP 09, 123 (2023)

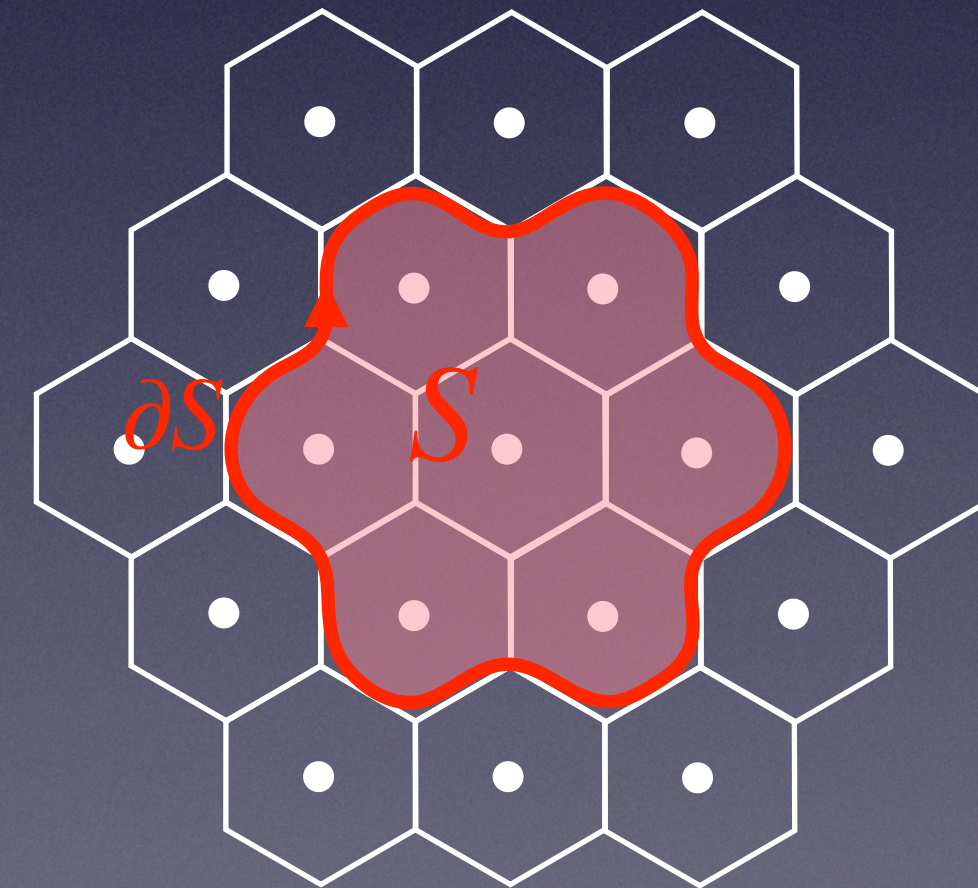
エネルギー密度

$$h = \frac{1}{V} \langle H \rangle = \sum_{a,b,c} C_2(c) N_{\bar{a}b}^c \frac{d_c}{d_a d_b} |\psi(a)|^2 |\psi(b)|^2 - \frac{K}{2} \sum_{a,b} \psi^*(a) \left(N_{(1,0)b}^a + N_{(0,1)b}^a \right) \psi(b)$$

Wilson loop

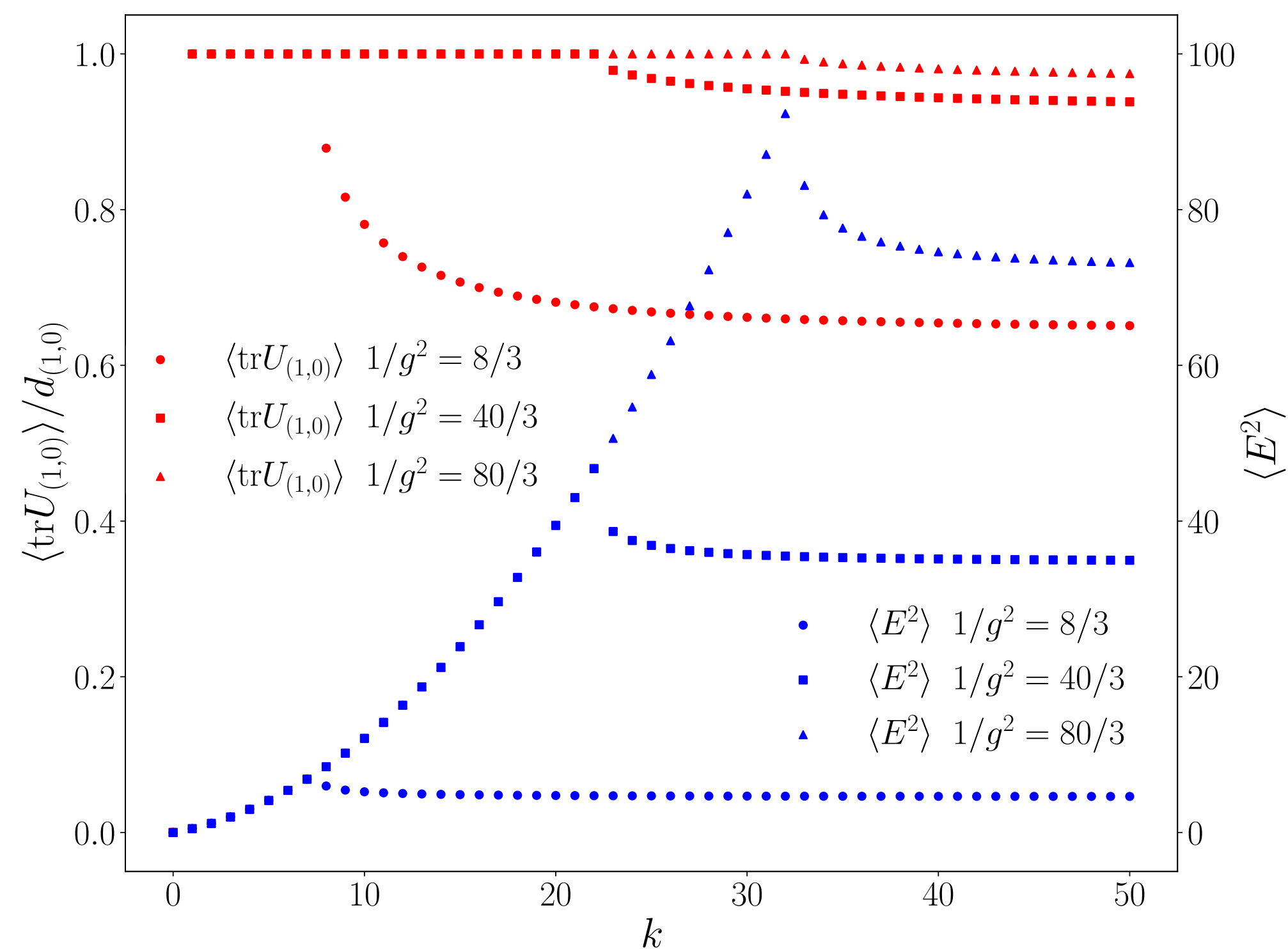
$$\langle \text{tr } U_d(\partial S) \rangle = d_d \exp(-|S| \sigma_d)$$

弦の張力 $\sigma_d := \ln \frac{d_d}{\sum_{a,b} N_{db}^a \psi^*(a) \psi(b)}$

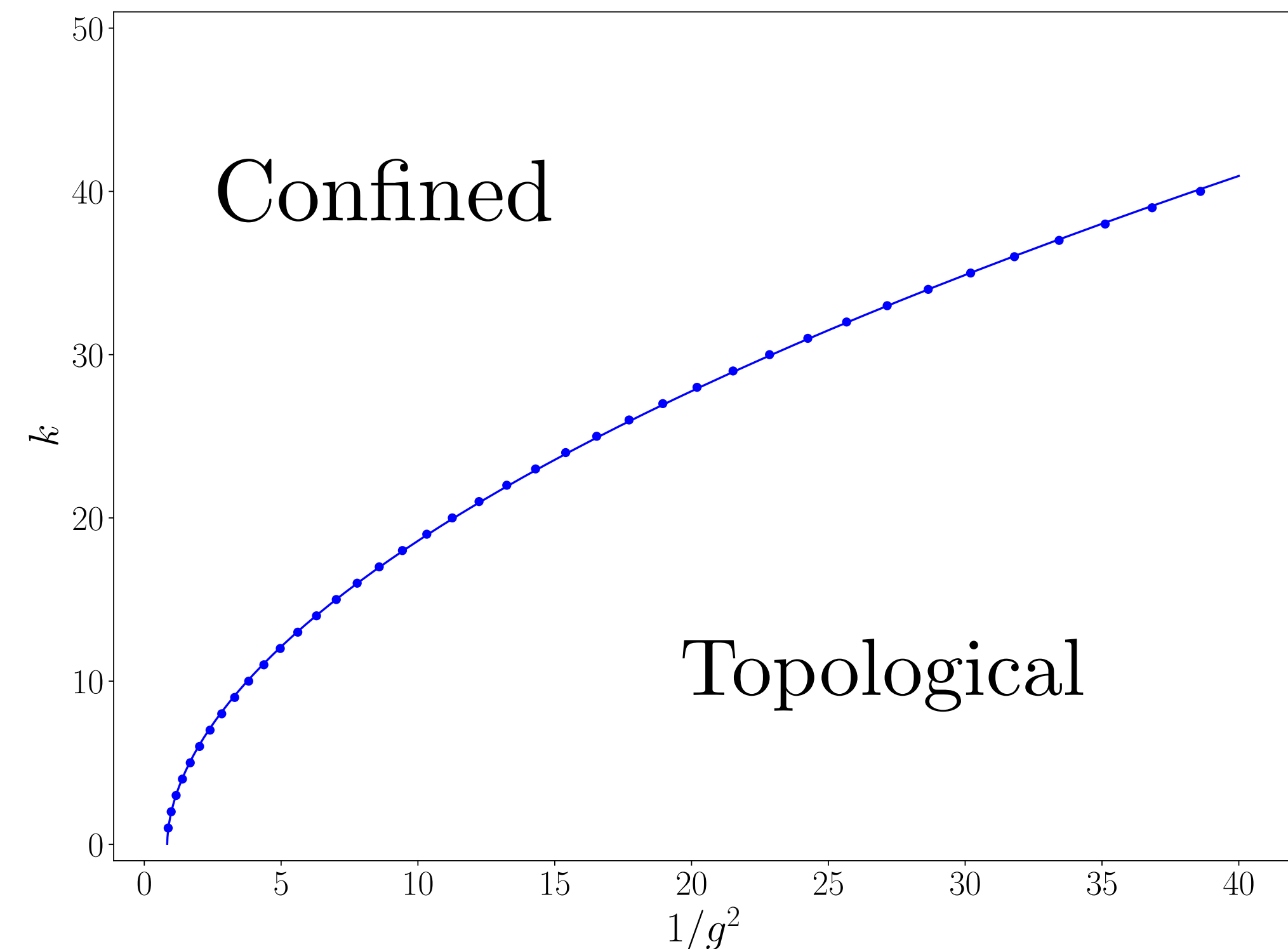


数值計算結果

Numerical results



相転移が起きる

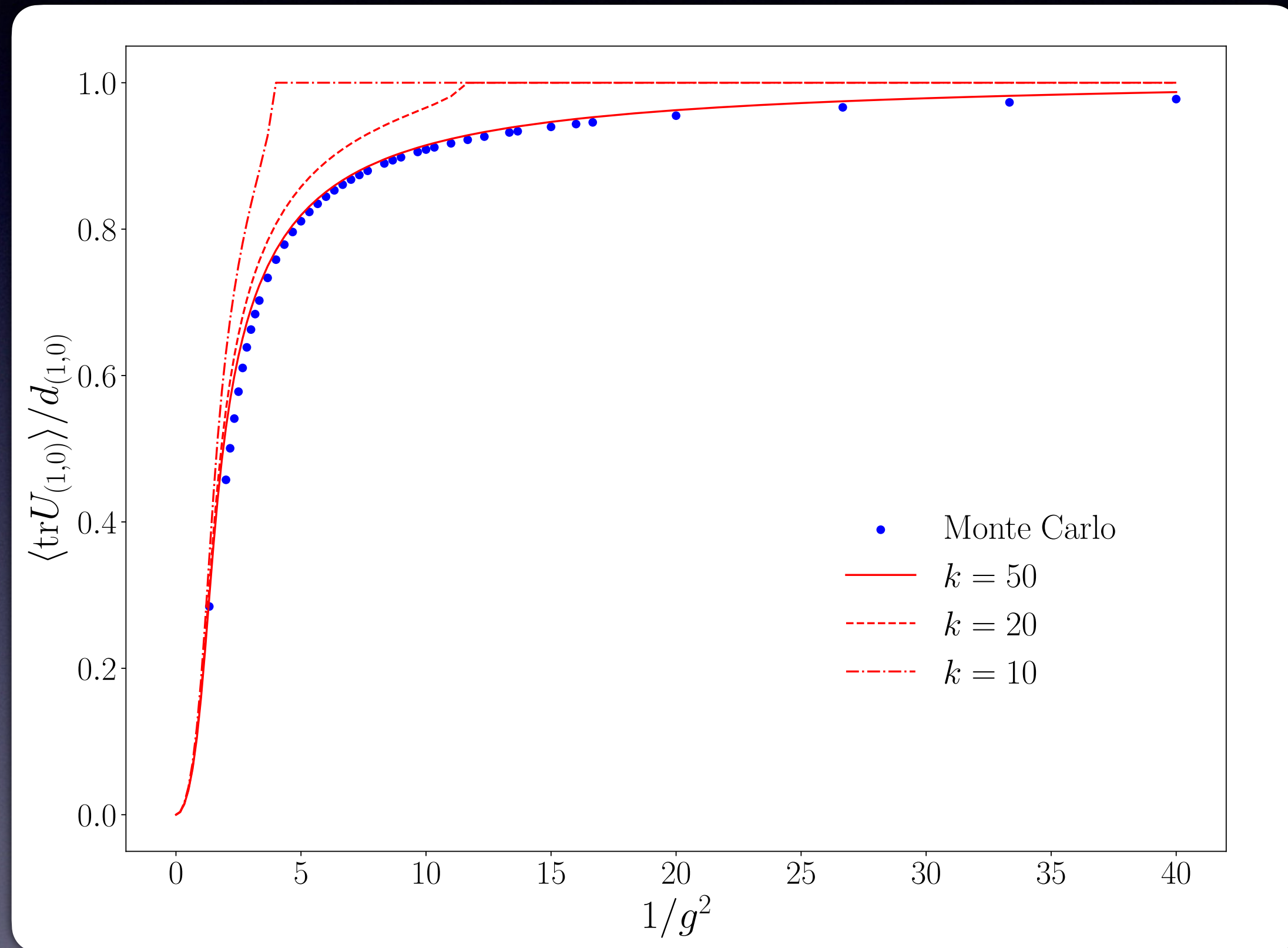


トポロジカル相

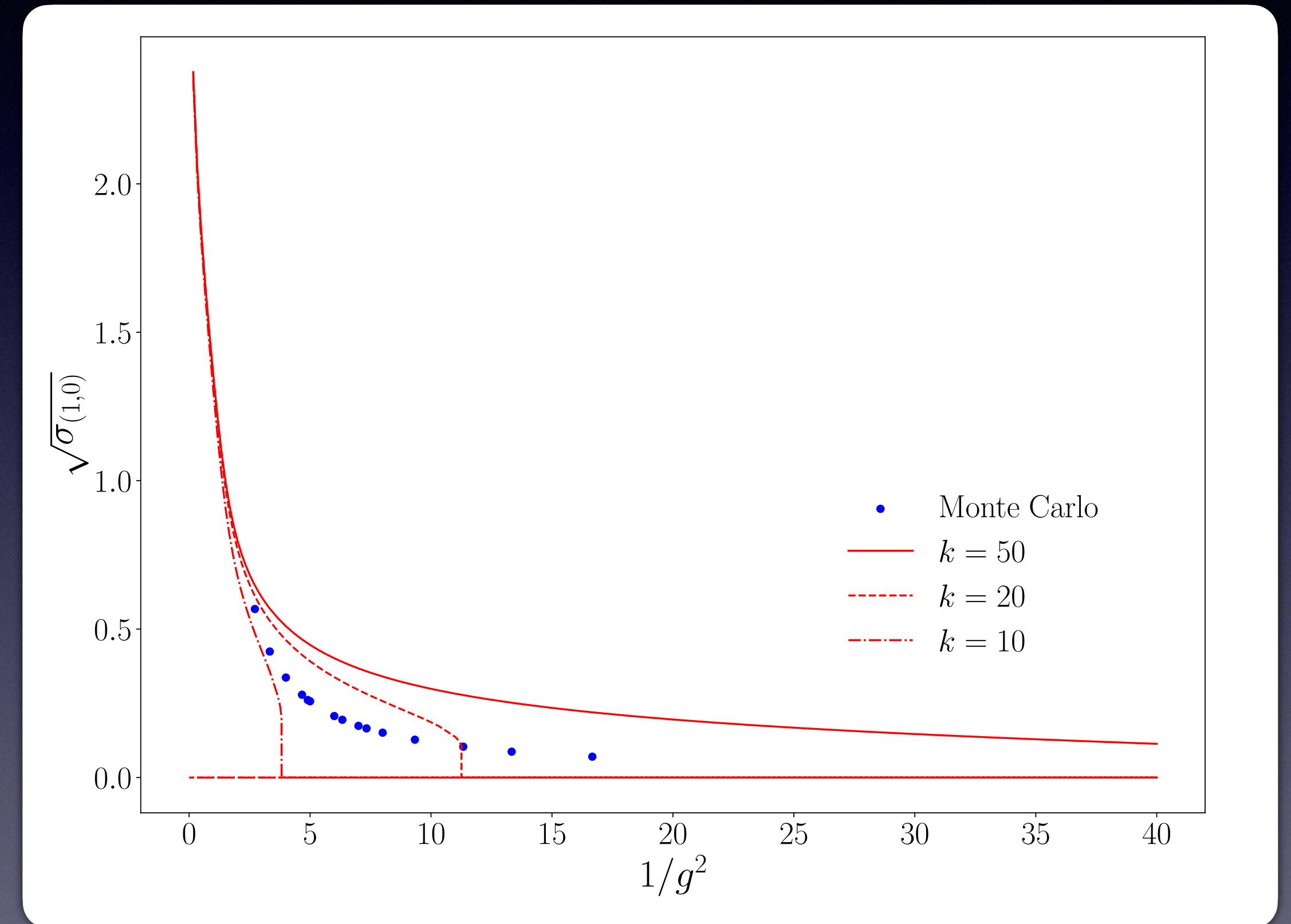
String-net condensation: $\psi(a) \sim d_a$
 弦の張力が消えた状態

Monte-Carlo計算との比較

プラケット



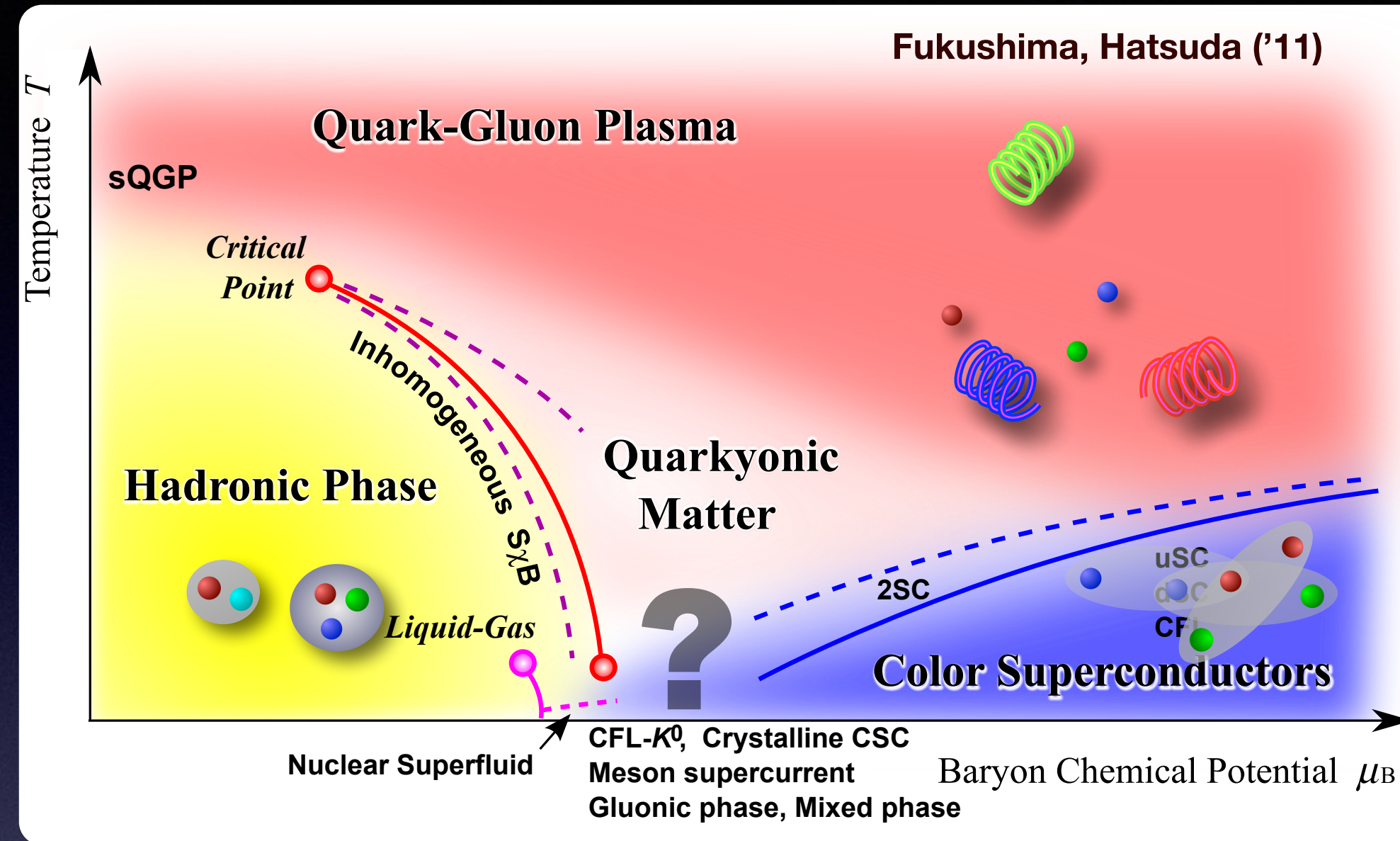
弦の張力



大きい k でよく一致

$(1 + 1)$ 次元 QCDの有限密度計算

QCDの有限密度計算



- QCDの有限密度状態方程式はどのようなものか？
- バリオン物質からクォーク物質へ変化するときのクォークの分布関数はどの様に変化するか？
- どのような相が実現するか？非一様相？

(1+1)次元QCDの有限密度計算

(1+1)次元の特徴

- ゲージ場がdynamicalではない
- ユニタリ変換でゲージ場を消去可能
- Open Boundary Condition(OBC)では有限自由度

(無次元化した)QCD₂ ハミルトニアン

$$J = \frac{ag_0}{2}, w = \frac{1}{2g_0a}, m = m_0/g_0 \quad g_0 = 1 \text{ 単位系を使う}$$

$$H/g_0 = J \sum_{n=1}^{N-1} E_i^2(n) \quad \text{電場項}$$

$$+w \sum_{n=1}^{N-1} \left(\chi^\dagger(n+1)U(n)\chi(n) + \chi^\dagger(n)U^\dagger(n)\chi(n+1) \right)$$

ホッピング項

$$+m \sum_{n=1}^N (-1)^n \chi^\dagger(n)\chi(n) \quad \text{質量項}$$

ユニタリ変換で U を消去

Sala, Shi, Kühn, Bañuls, Demler, Cirac, Phys. Rev. D 98, 034505 (2018)

Atas, Zhang, Lewis, Jahanpour, Haase, Muschik, Nature Commun. 12, 6499 (2021)

$$\Theta\chi(n)\Theta^\dagger := U(n-1)U(n-2)\cdots U(1)\chi(n)$$

$$\Theta H \Theta^\dagger = J \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{m=1}^n \chi^\dagger(m) T_i \chi(m) \right)^2 \quad \text{電場項}$$

$$+ w \sum_{n=1}^{N-1} \left(\chi^\dagger(n+1)\chi(n) + \chi^\dagger(n)\chi(n+1) \right)$$

ホッピング項

$$+ m \sum_{n=1}^N (-1)^n \chi^\dagger(n)\chi(n) \quad \text{質量項}$$

変分波動関数として

- 行列積状態を使う

$$|\psi\rangle = \sum_{\{n_i\}} |n_1\rangle \cdots |n_N\rangle \text{tr} M_1^{n_1} \cdots M_N^{n_N}$$

$$[M_i^{n_i}]_{ij} : D \times D \text{行列}$$

- 密度行列くりこみ群の手法で最適化

$$E = \min_{\psi} \langle \psi | H | \psi \rangle$$

iTensorのライブラリを使う

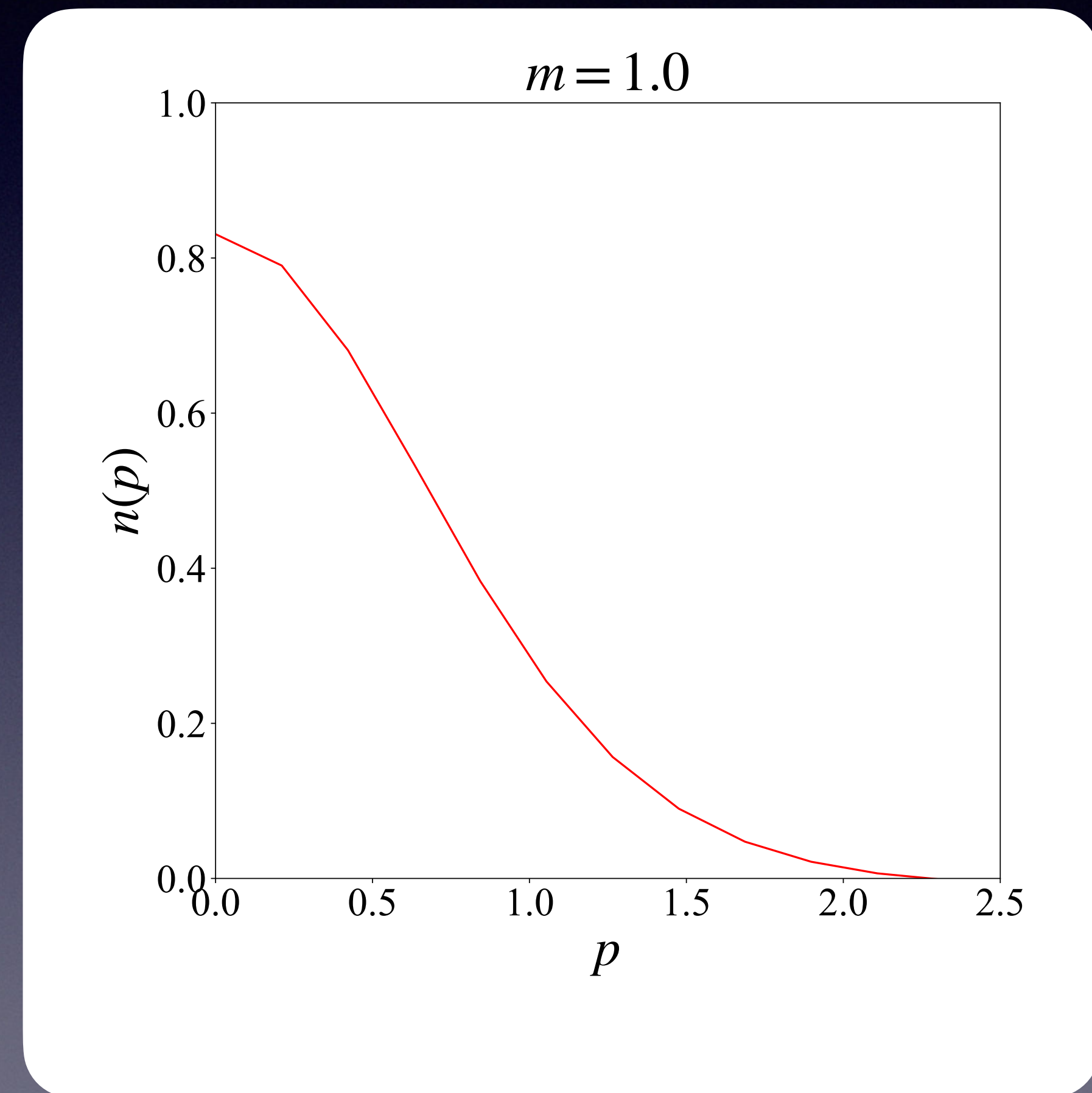
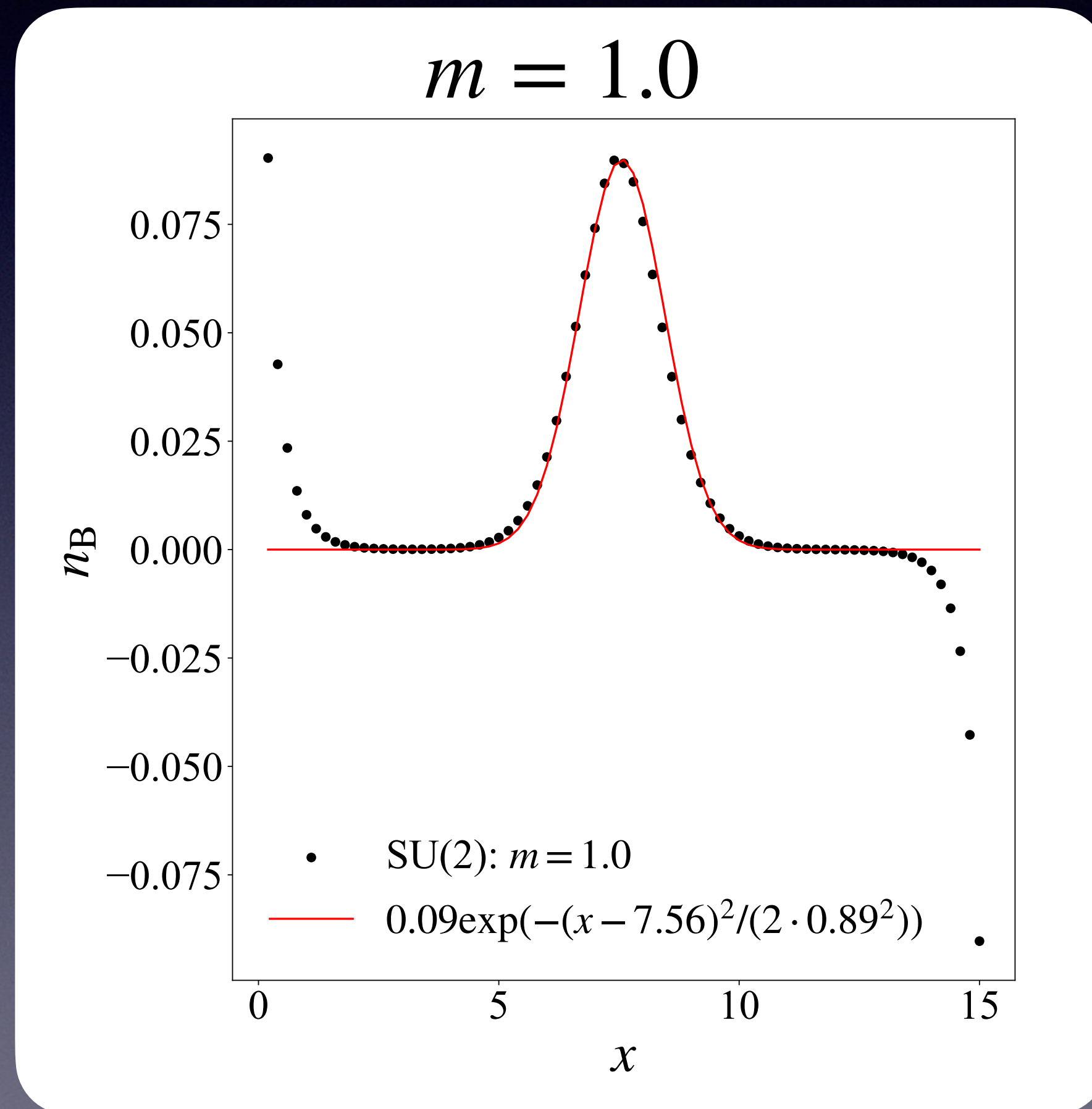
数值計算結果

カラー SU(2), 1 フレーバ, 真空

1 バリオン状態 $\dim \mathcal{H} = 2^{300}$ $J = 1/20$ $w = 5$ 体積 $V = 15$ (g_0 単位)

バリオン数密度

クォーク分布関数

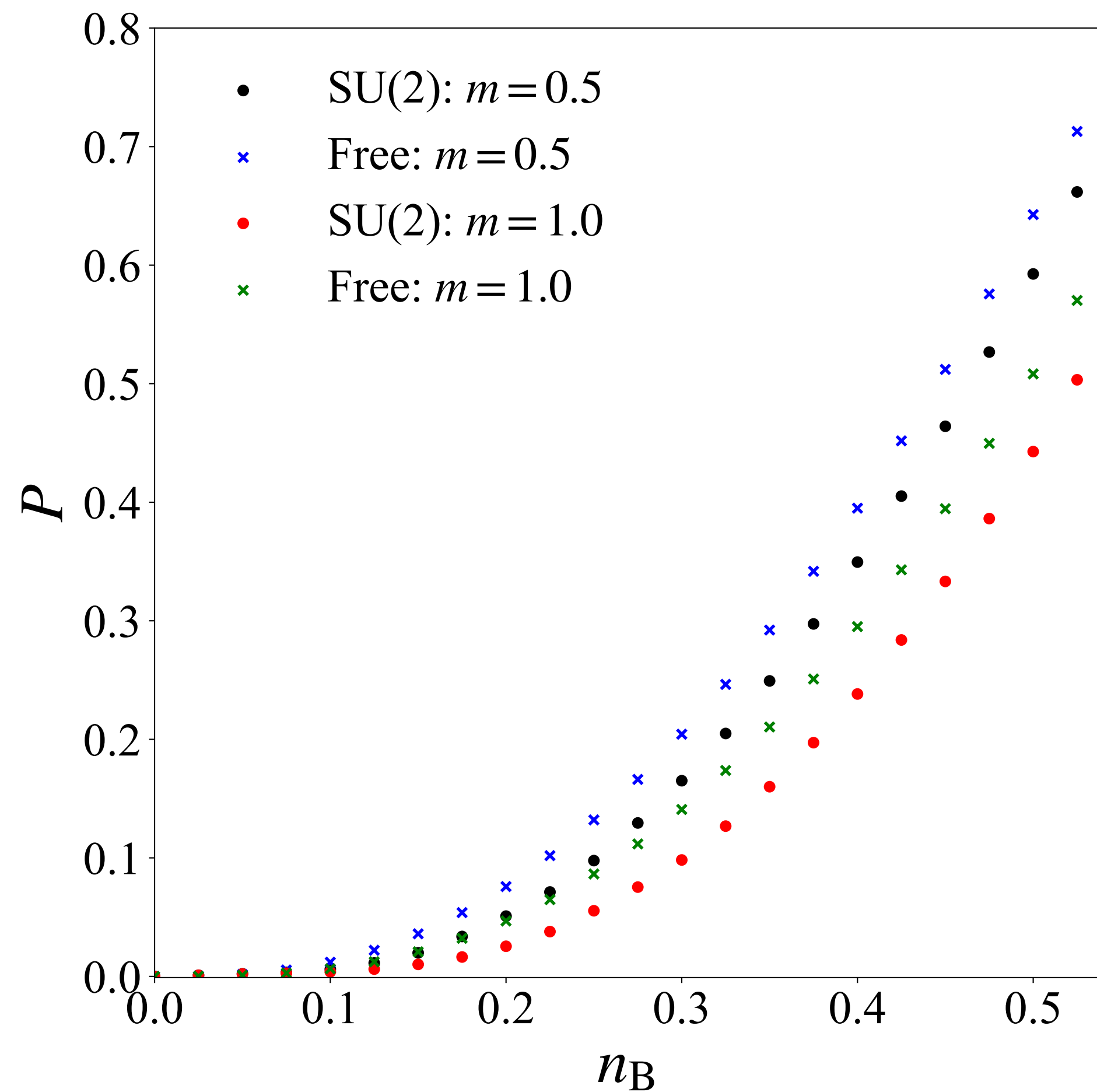


バリオンサイズ ~ 1

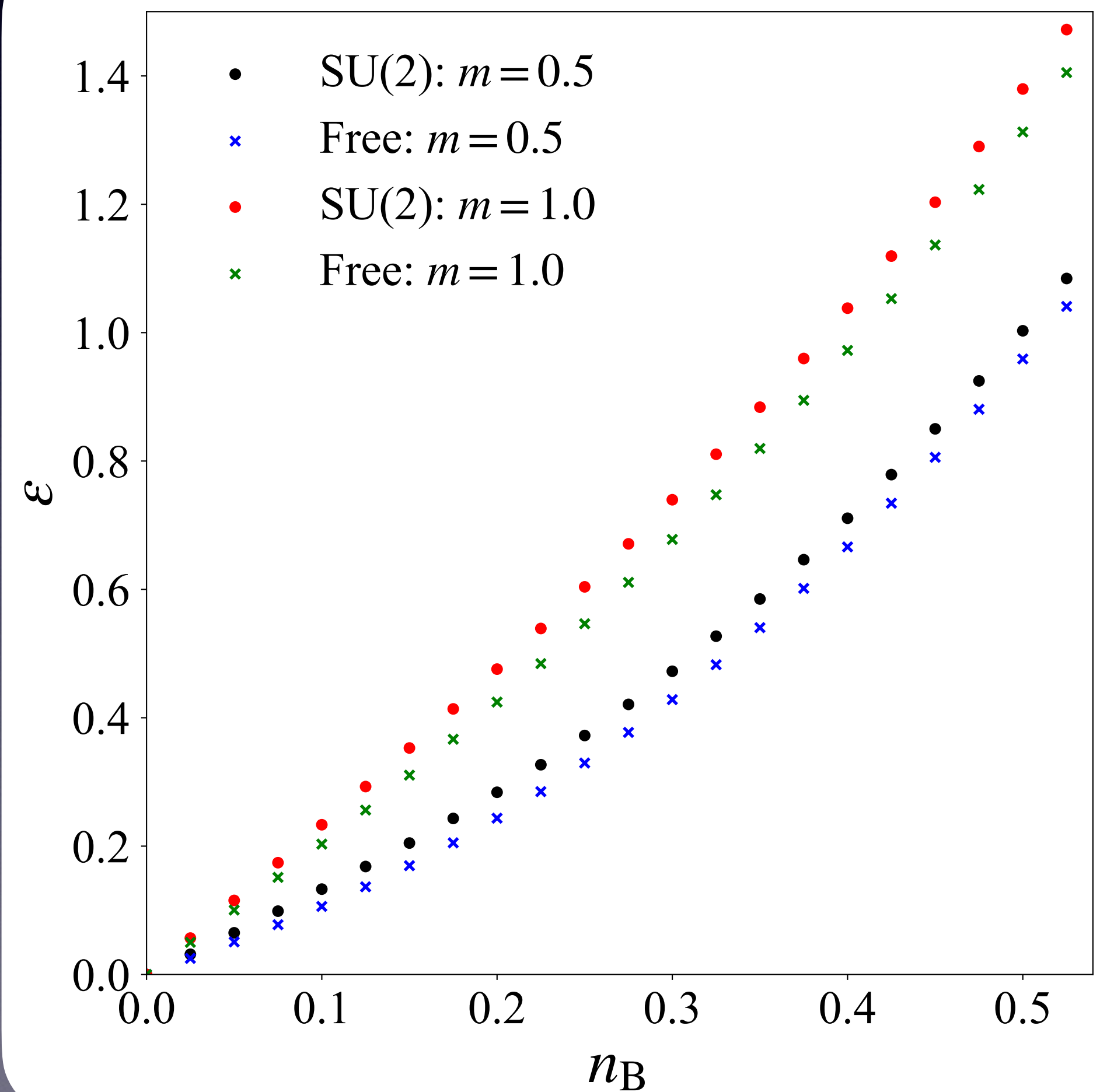
カラー SU(2), 1 フレーバ, 有限密度

$$J = 1/8 \quad w = 2 \quad V = 40 \quad \dim \mathcal{H} = 2^{320}$$

圧力



エネルギー密度

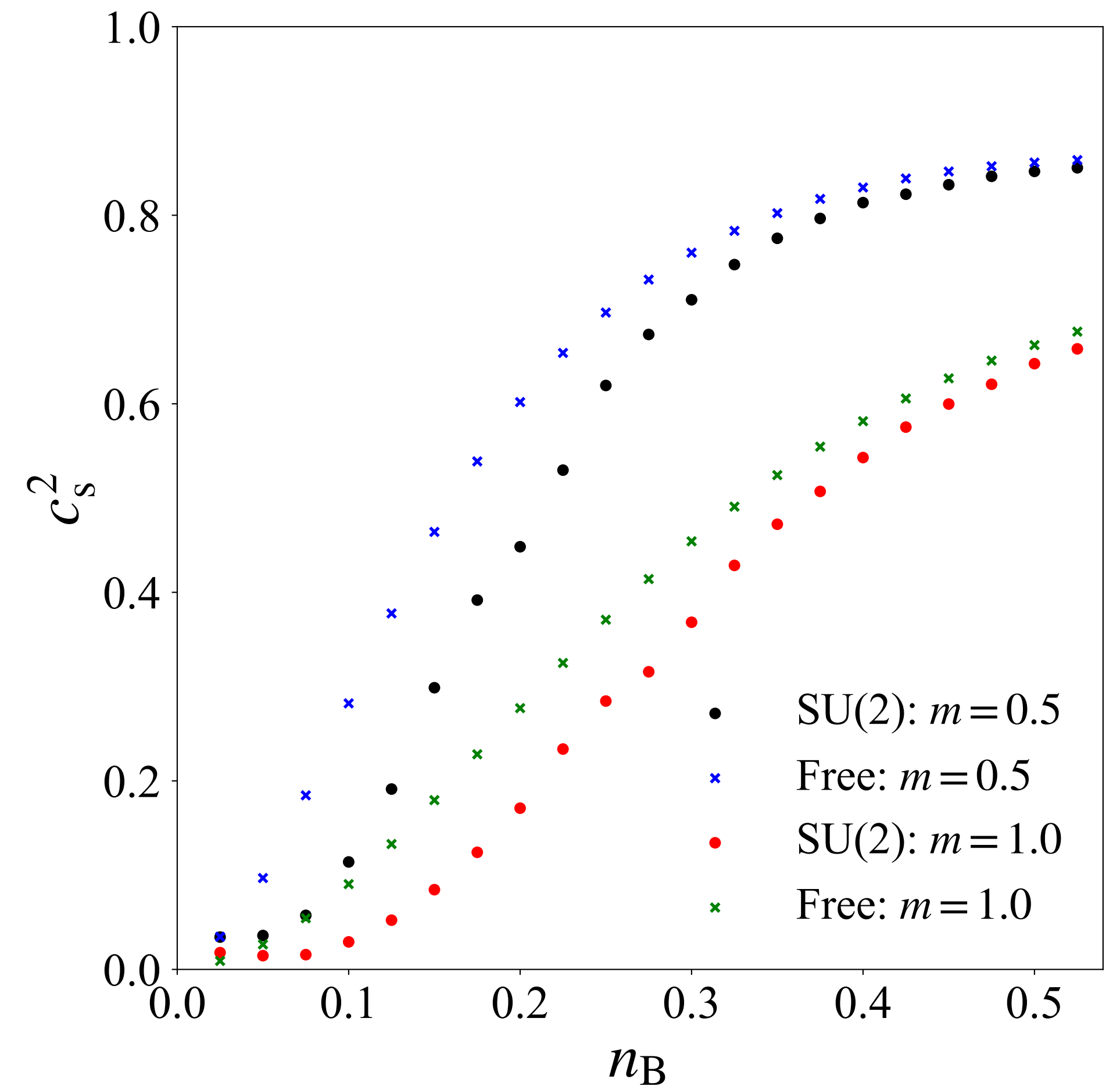
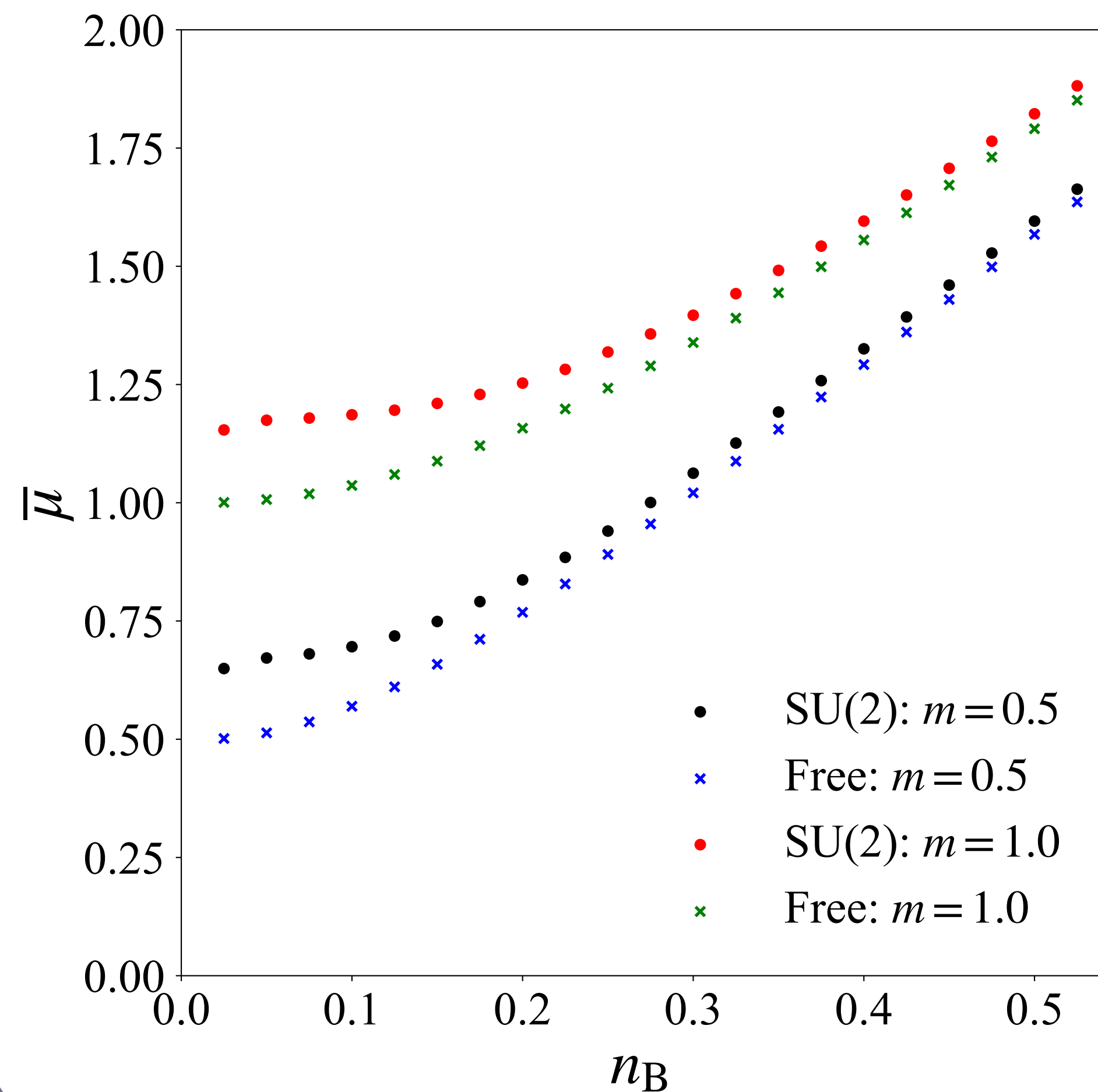


カラー SU(2), 1 フレーバ, 有限密度

$$J = 1/8 \quad w = 2 \quad V = 40 \quad \dim \mathcal{H} = 2^{320}$$

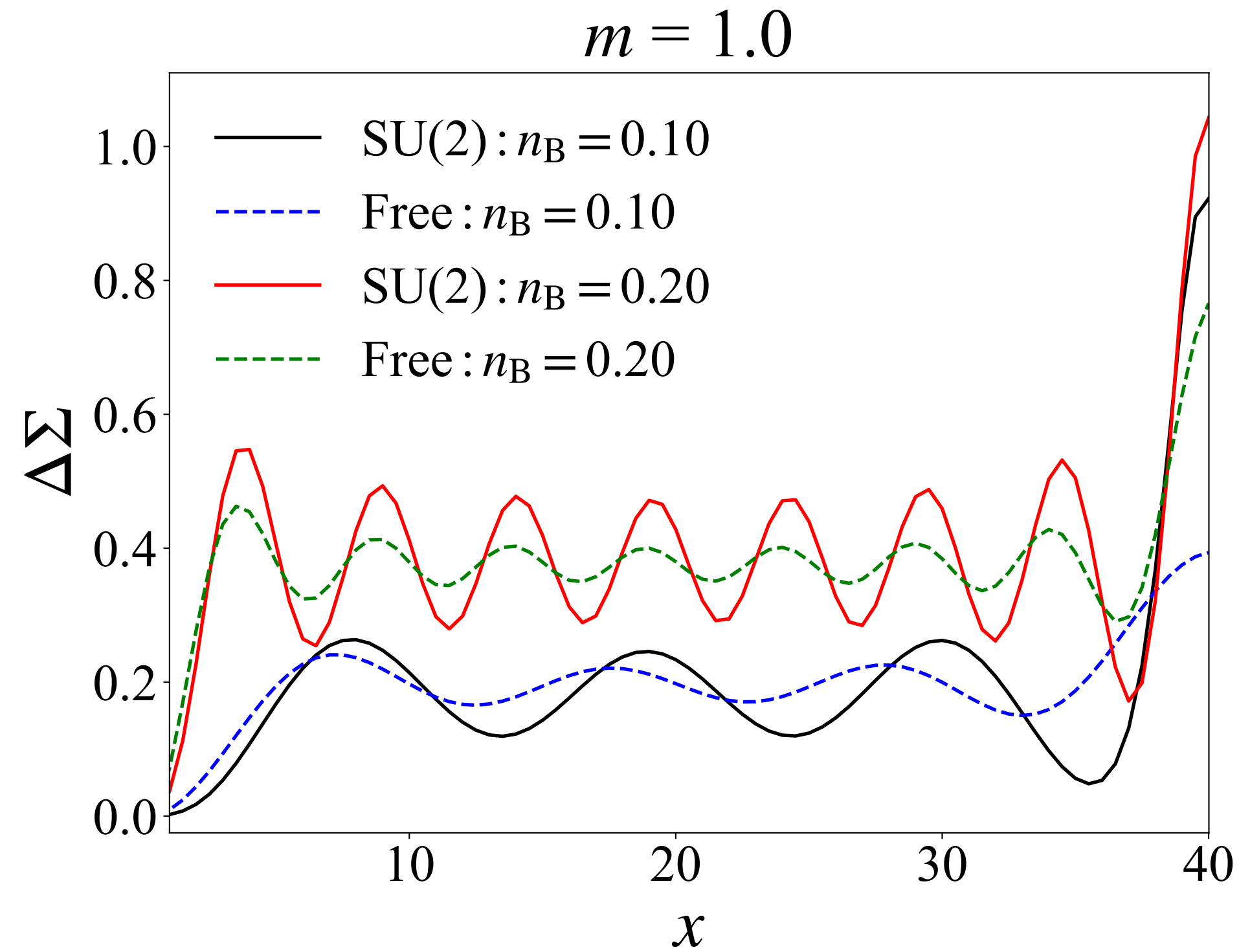
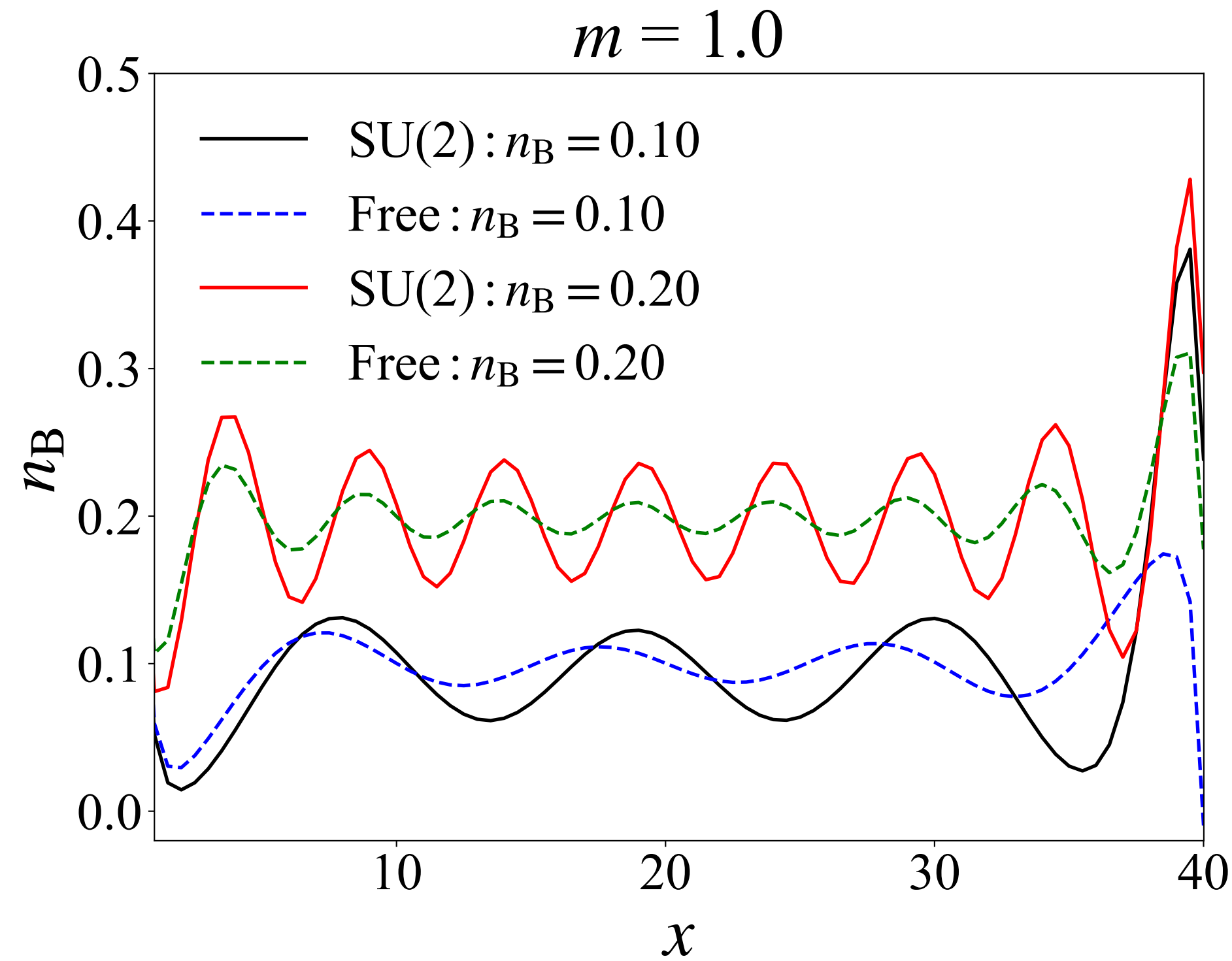
化学ポテンシャル

音速



非一樣凝縮

$$J = 1/8 \quad w = 2 \quad V = 40 \quad \dim \mathcal{H} = 2^{320}$$

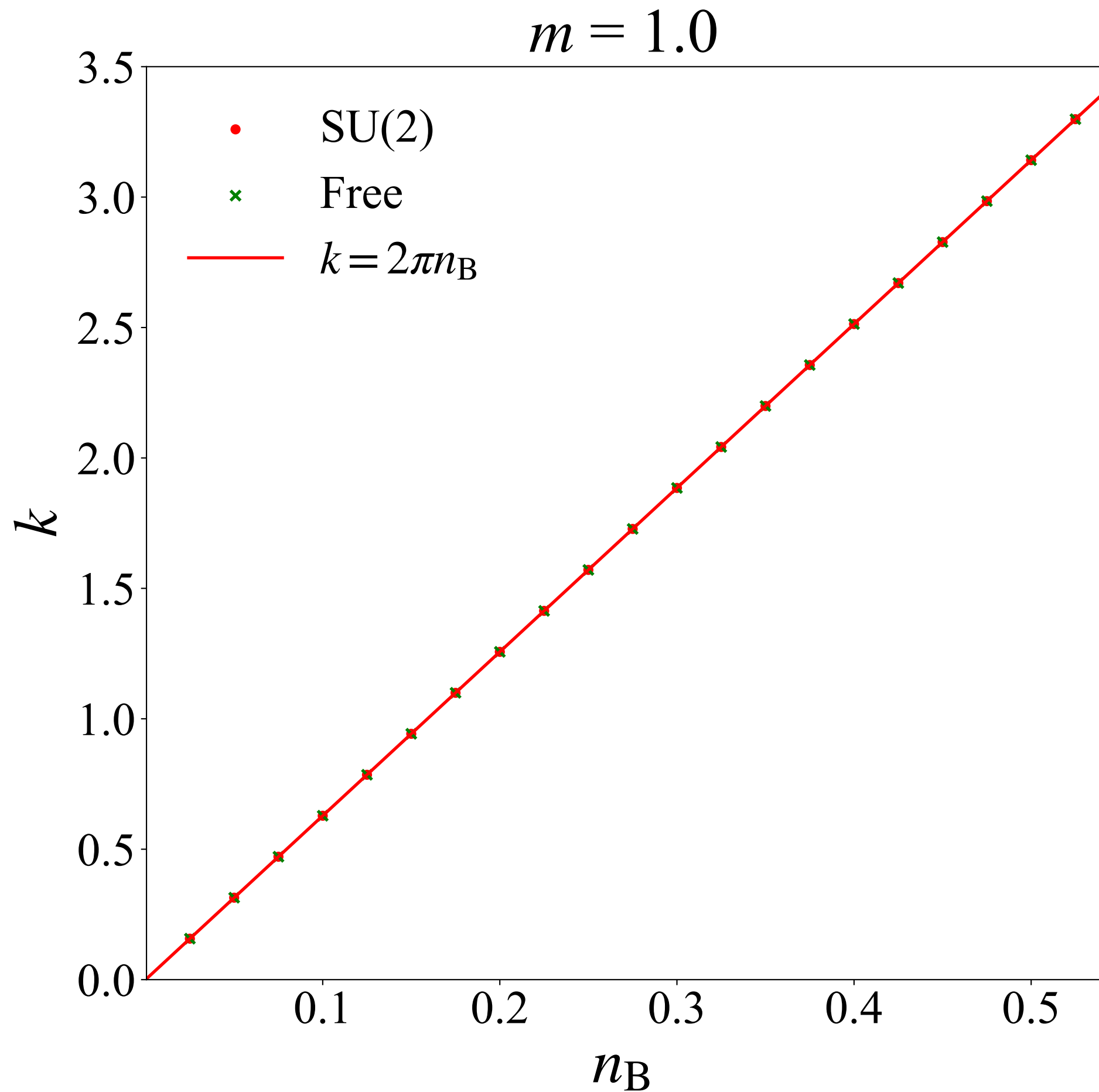


$$\Delta \Sigma = \langle \bar{\psi} \sigma \psi(x) \rangle - \langle \bar{\psi} \sigma \psi(x) \rangle_{\mu=0}$$

振動の波数依存性

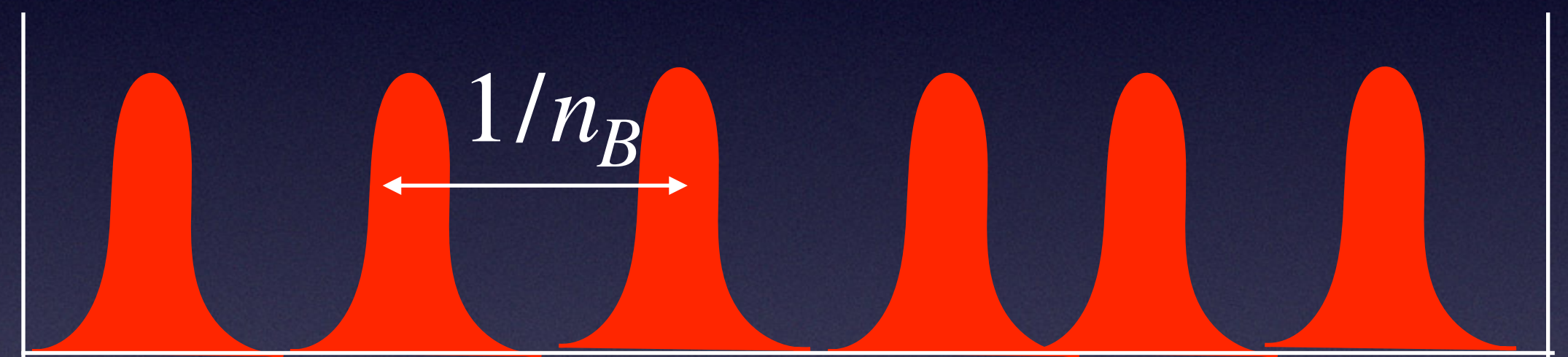
$$J = 1/8 \quad w = 2 \quad V = 40 \quad \dim \mathcal{H} = 2^{320}$$

振幅が最大の端数



ハドロン描像

ハドロン間の相互作用が斥力なら



ハドロン距離 $1/n_B \Rightarrow k = 2\pi n_B$

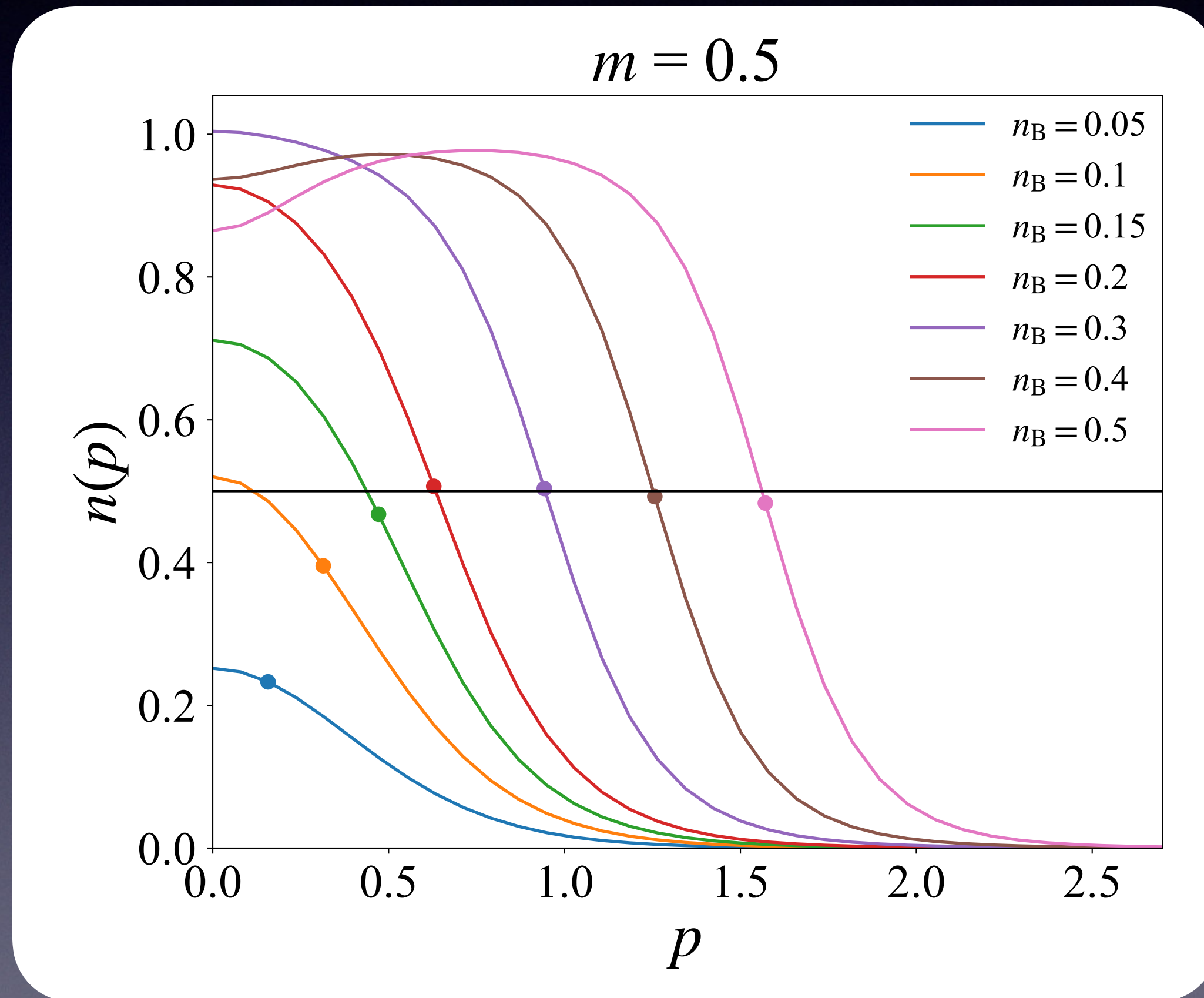
クォーク描像

クォーク間の相互作用が引力なら
フェルミ面は不安定

\Rightarrow 密度波 $k = 2p_F = 2\pi n_B$

クォーク分布関数

$$J = 1/8 \quad w = 2 \quad V = 60 \quad \dim \mathcal{H} = 2^{480}$$



●低密度

フェルミ面なし

●高密度

フェルミ海

+BCS的ペアリング

$n_B \sim 0.2$ でバリオンからクォークへ転移

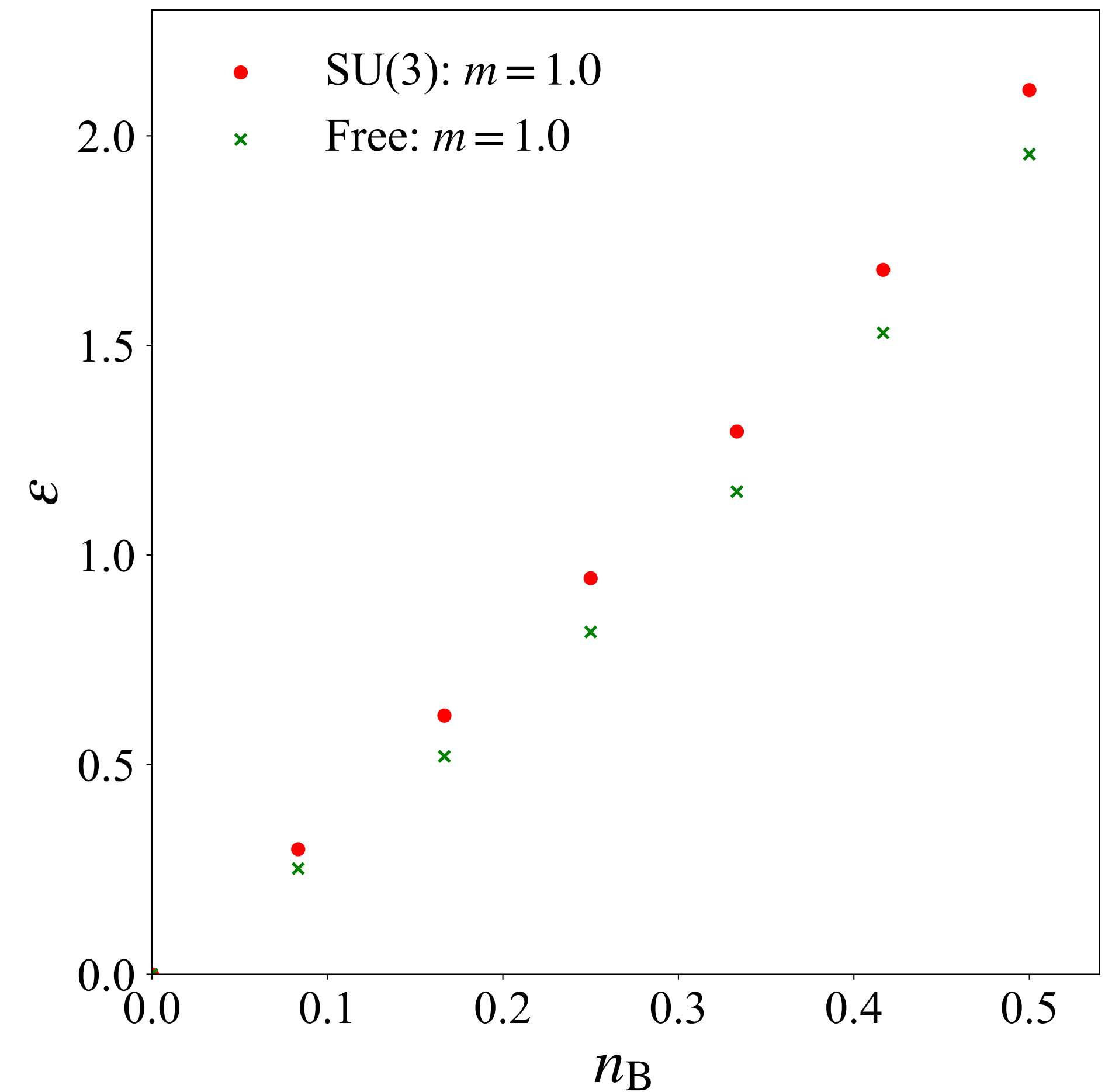
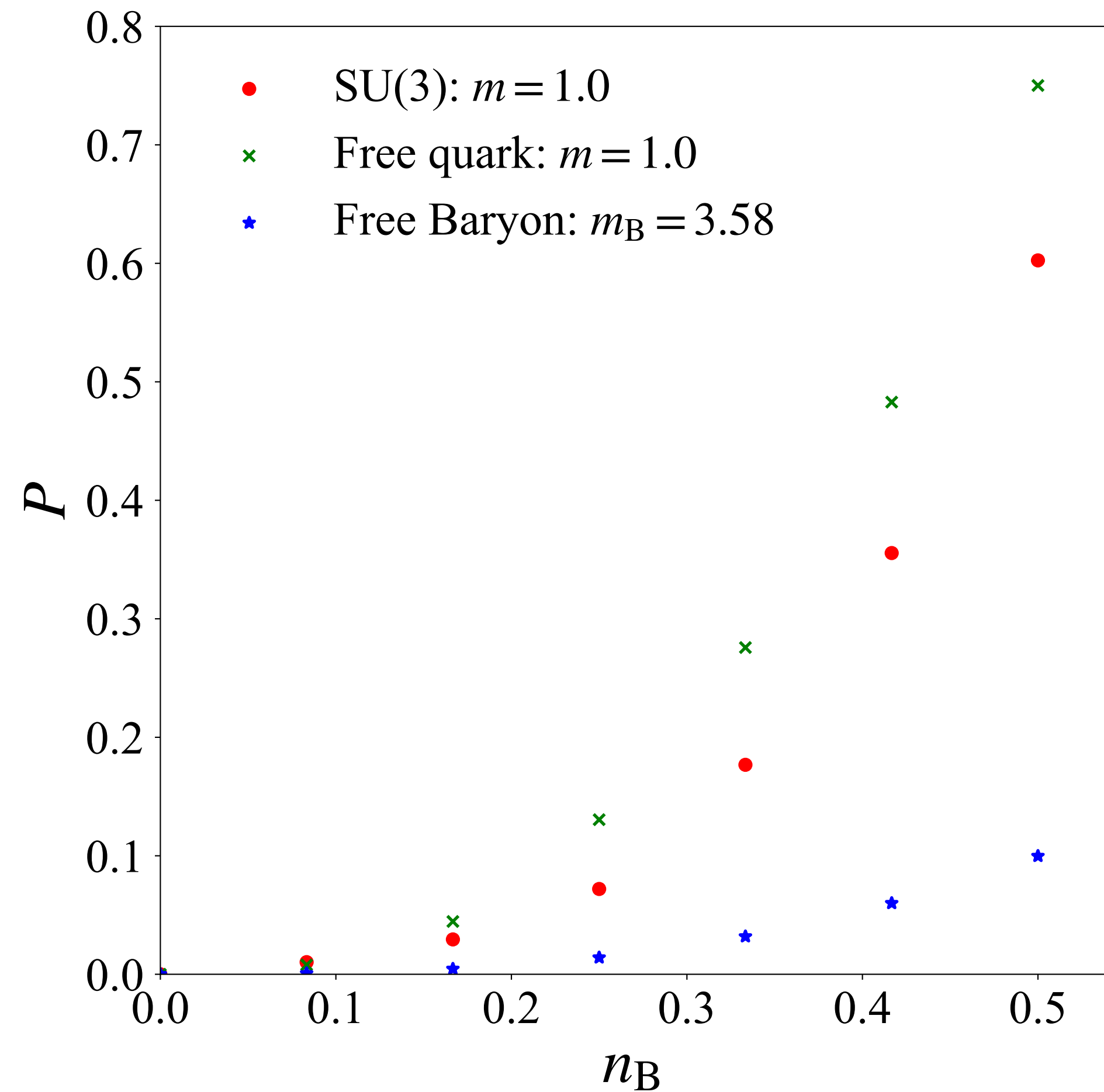
SU(3) QCD with $N_f = 1$

カラー SU(3), 1フレーバ, 有限密度

$$J = 1/8 \quad w = 2 \quad V = 12 \quad \dim \mathcal{H} = 2^{144}$$

圧力

エネルギー密度

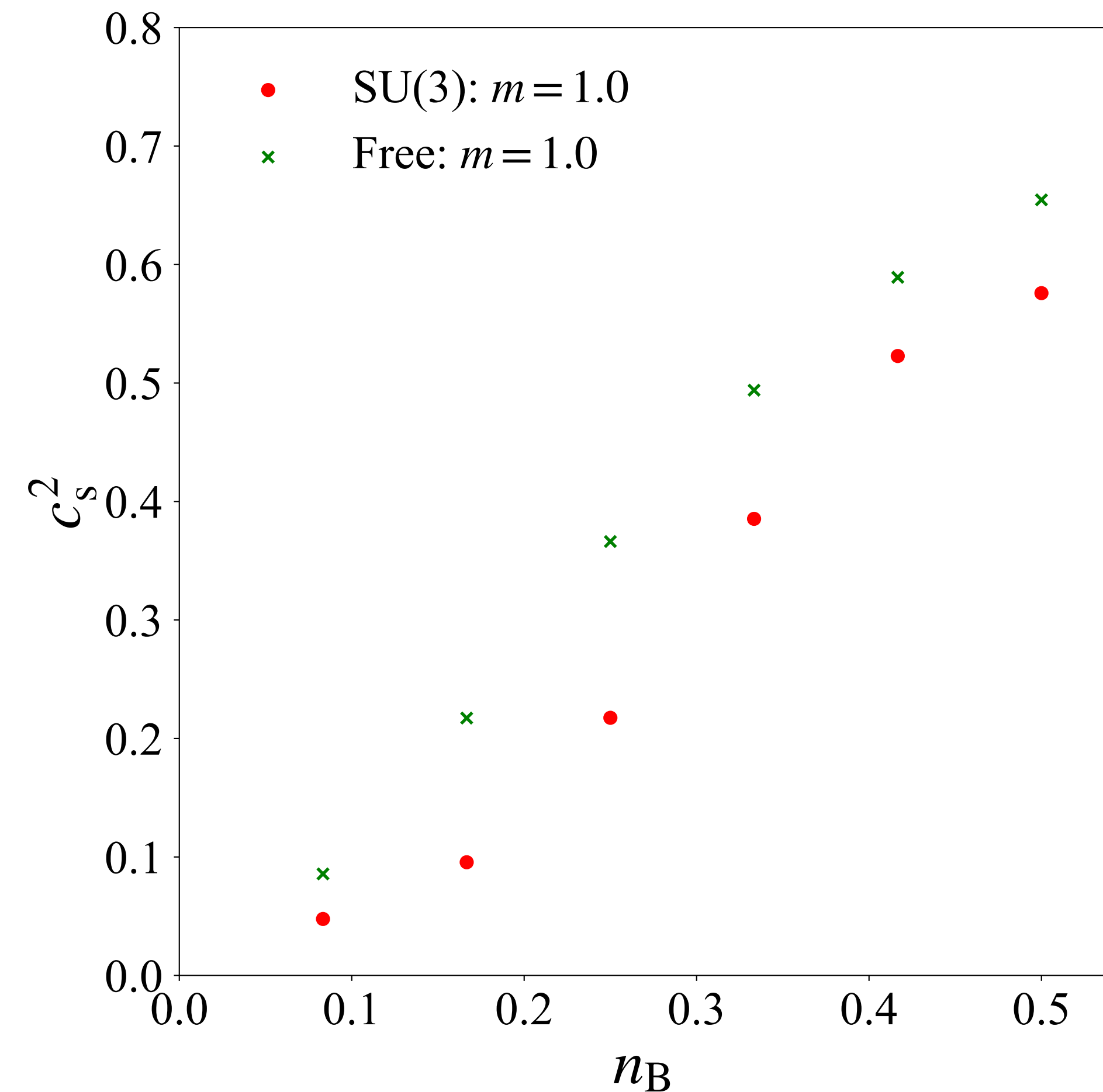
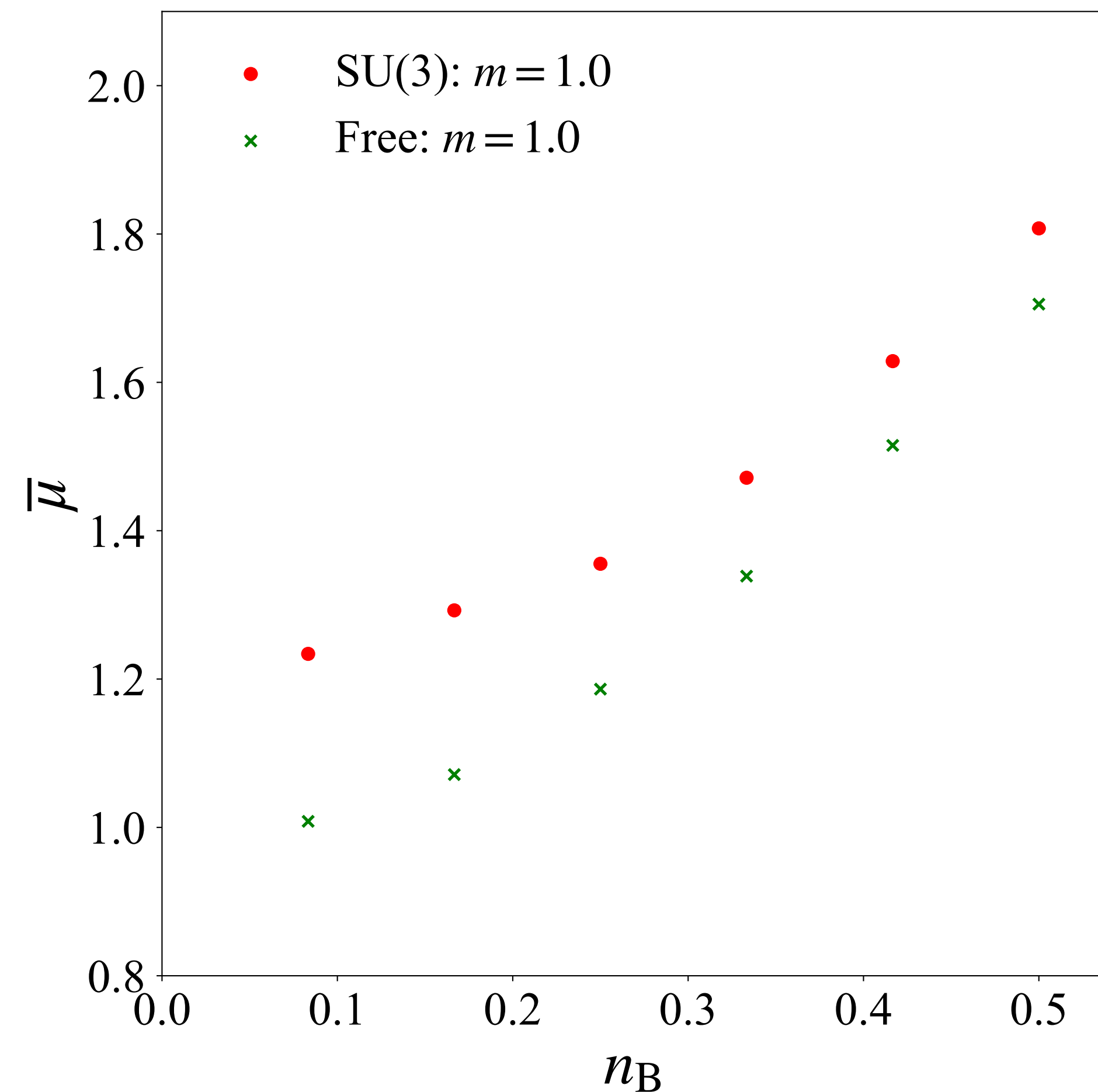


カラー SU(3), 1 フレーバ, 有限密度

$$J = 1/8 \quad w = 2 \quad V = 12 \quad \dim \mathcal{H} = 2^{144}$$

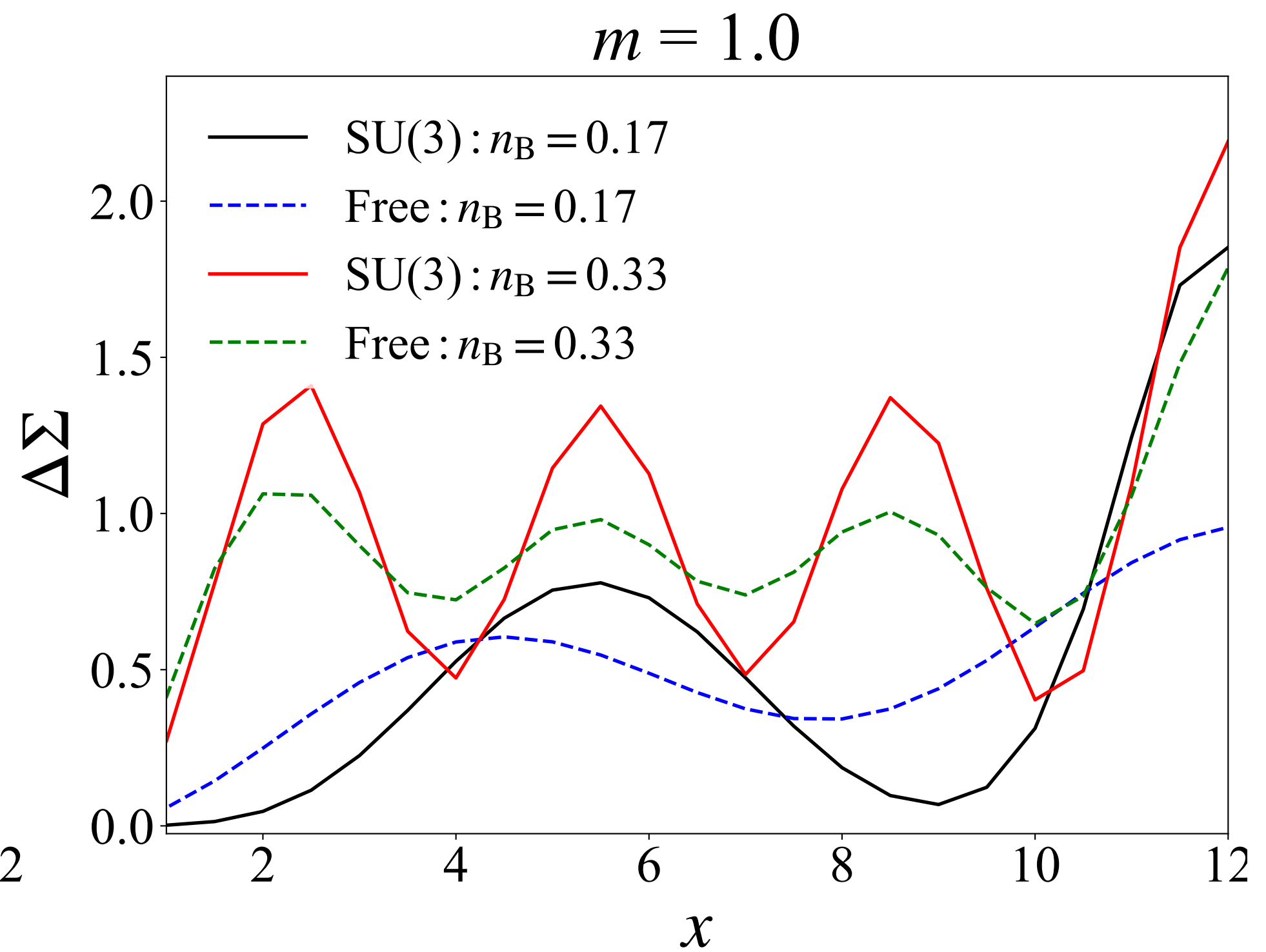
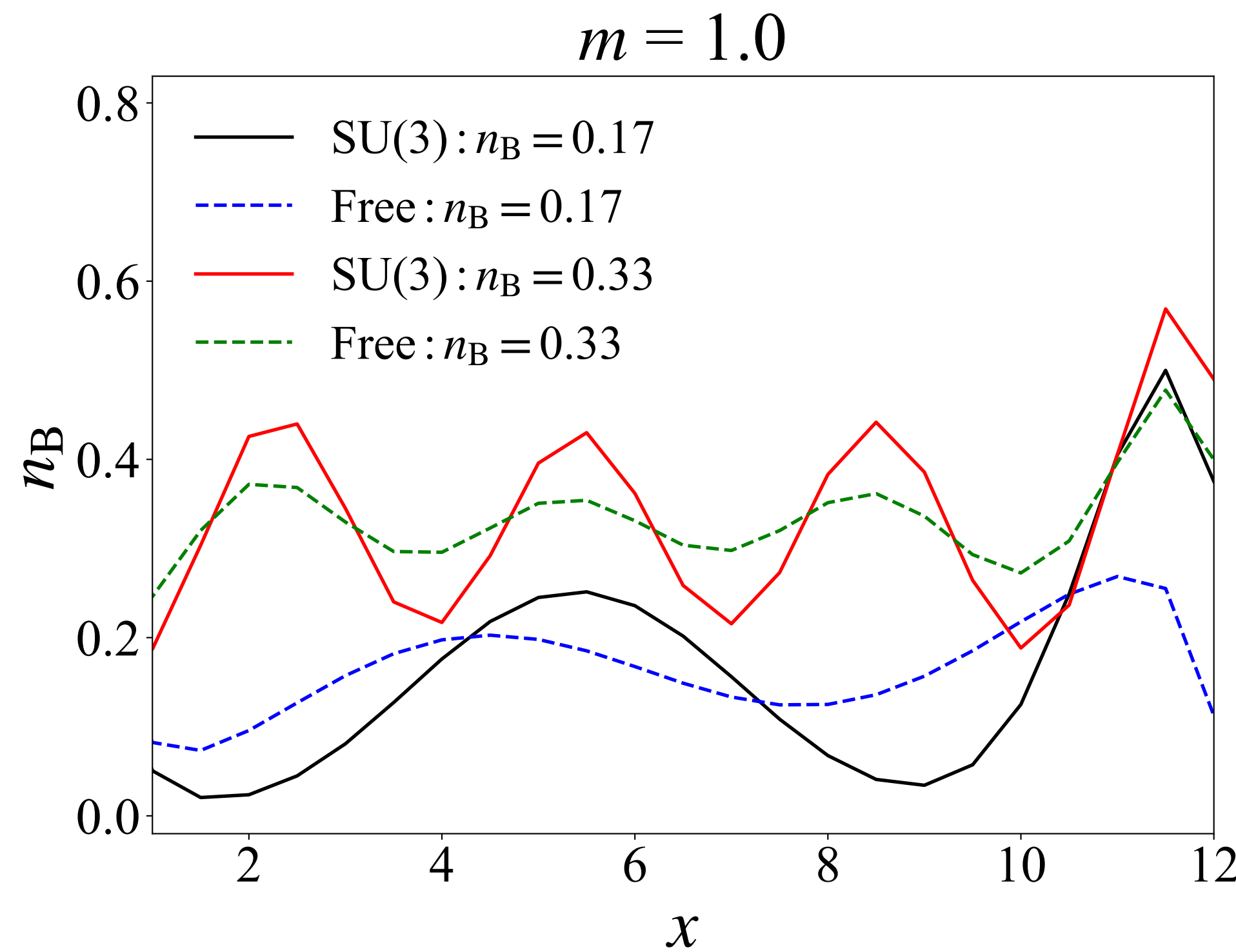
化学ポテンシャル

音速



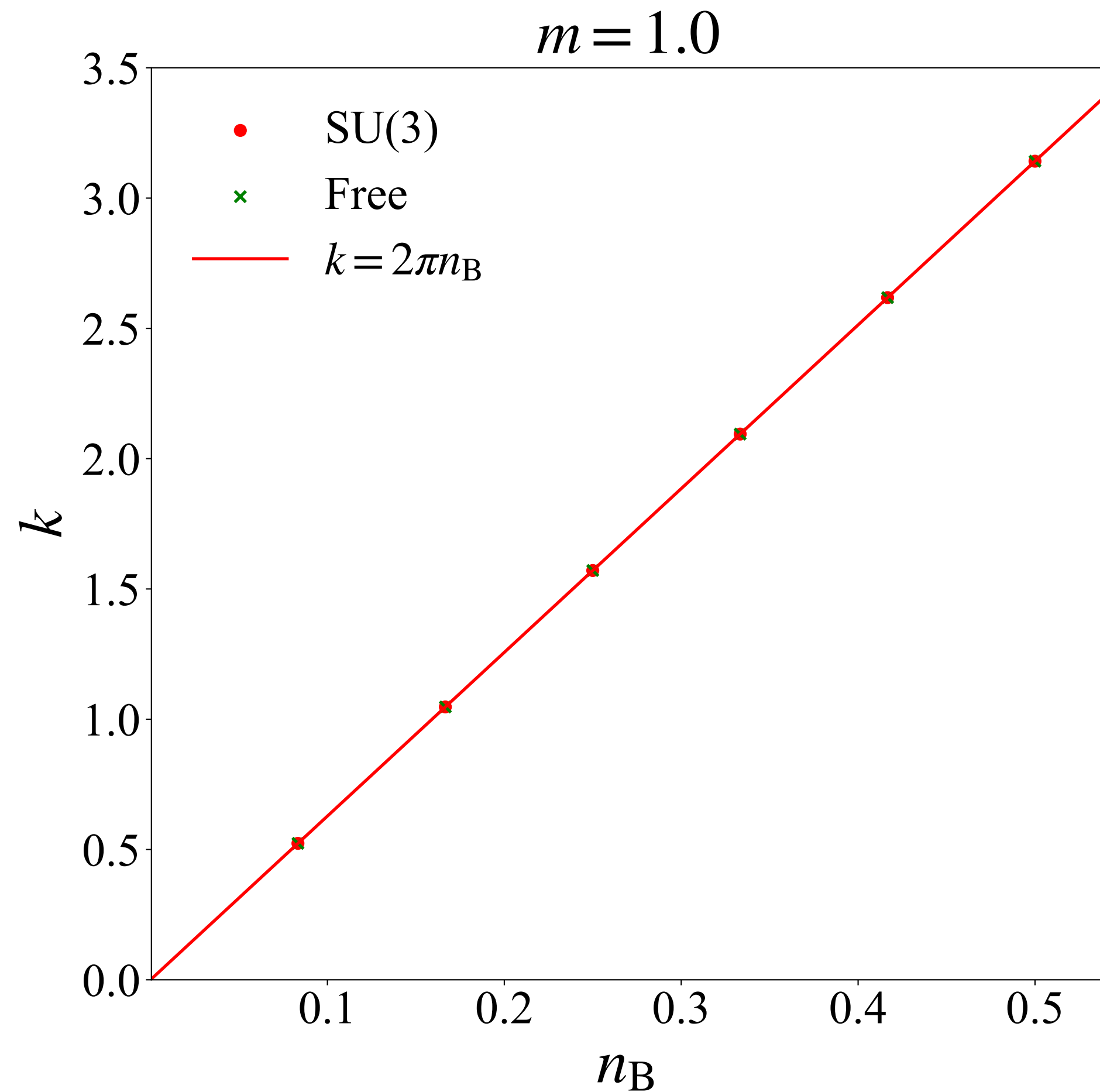
非一樣凝縮

$$J = 1/8 \quad w = 2 \quad V = 12 \quad \dim \mathcal{H} = 2^{144}$$

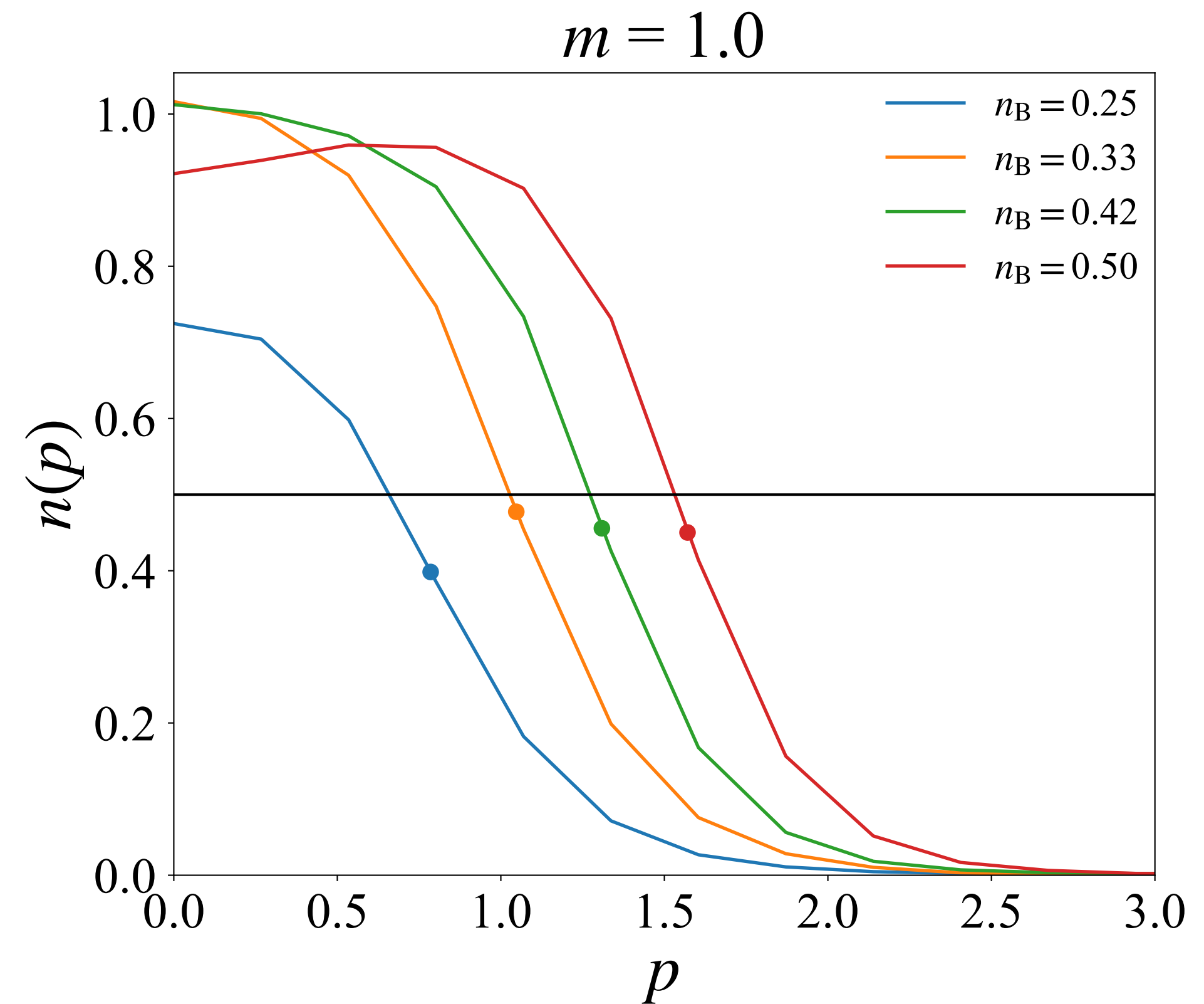


$$\Delta \Sigma = \langle \bar{\psi} \not{\tau} \psi(x) \rangle - \langle \bar{\psi} \not{\tau} \psi(x) \rangle_{\mu=0}$$

振動の波数依存性

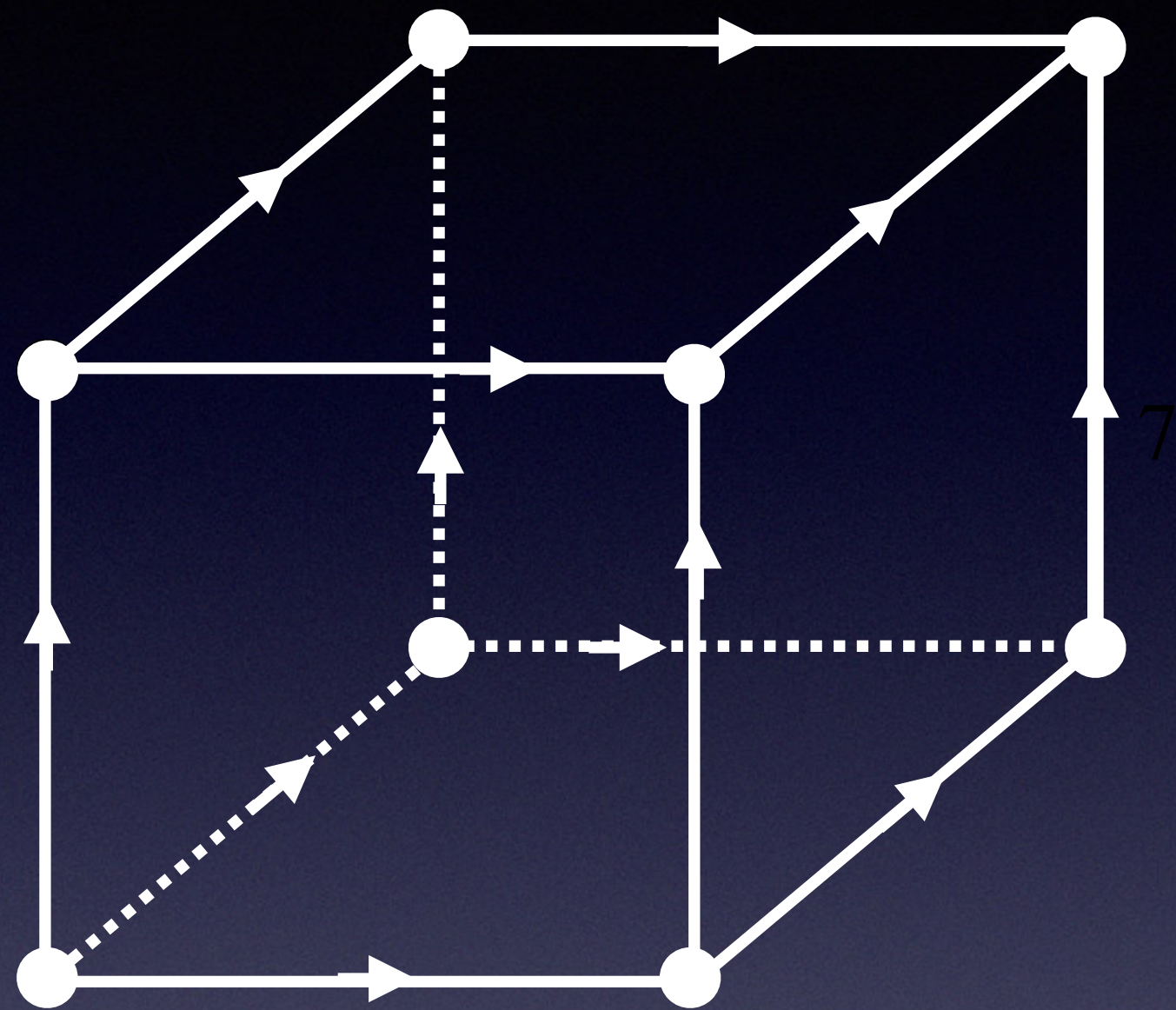


クォーク分布関数



$n_B = 0.3$ くらいでバリオンに転移？

(3+1)次元 Yang-Mills理論の熱化



1つの立方体

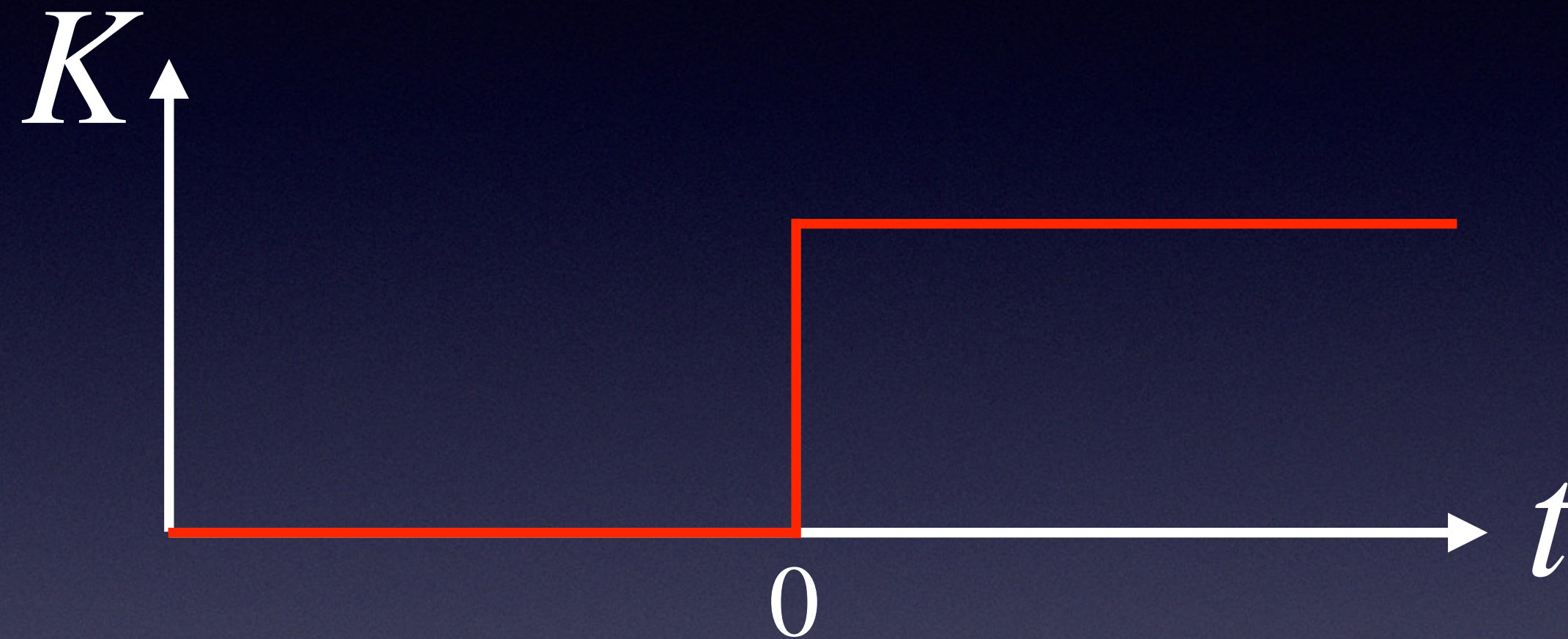
- 8個の頂点

- 6個の面

- 12個のリンク

セットアップ

重イオン衝突実験を真似るため、
相互作用クエンチングを行う

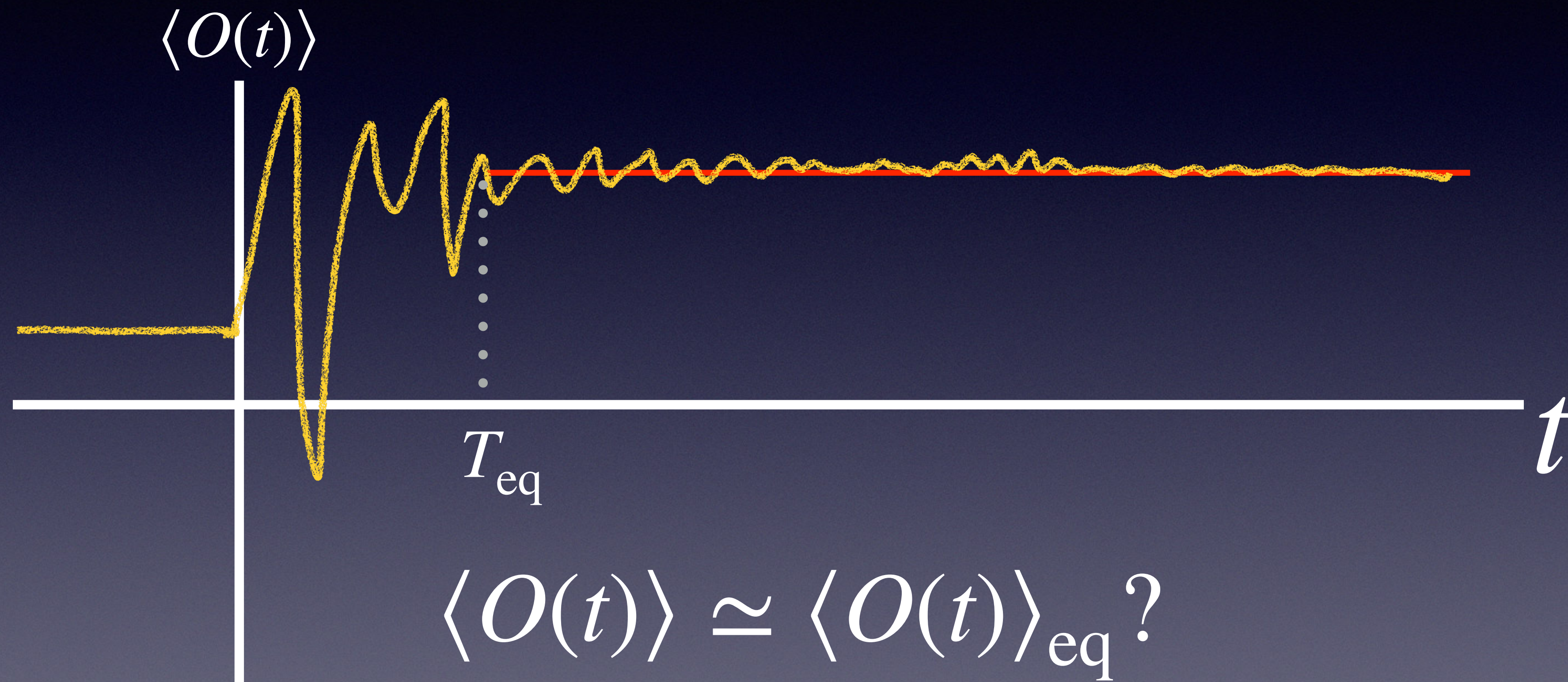


$$t < 0 \quad |\text{Vac}\rangle_{K=0}$$

$$t \geq 0 \quad |\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\text{Vac}\rangle_{K=0}$$

予期される振る舞い

ある演算子 O について $\langle O(t) \rangle := \langle \Psi(t) | O | \Psi(t) \rangle$



温度とカノニカルアンサンブル

初期状態を決めるとエネルギーが決まる

$$E = \langle H \rangle = \langle \Psi(t) | H | \Psi(t) \rangle$$

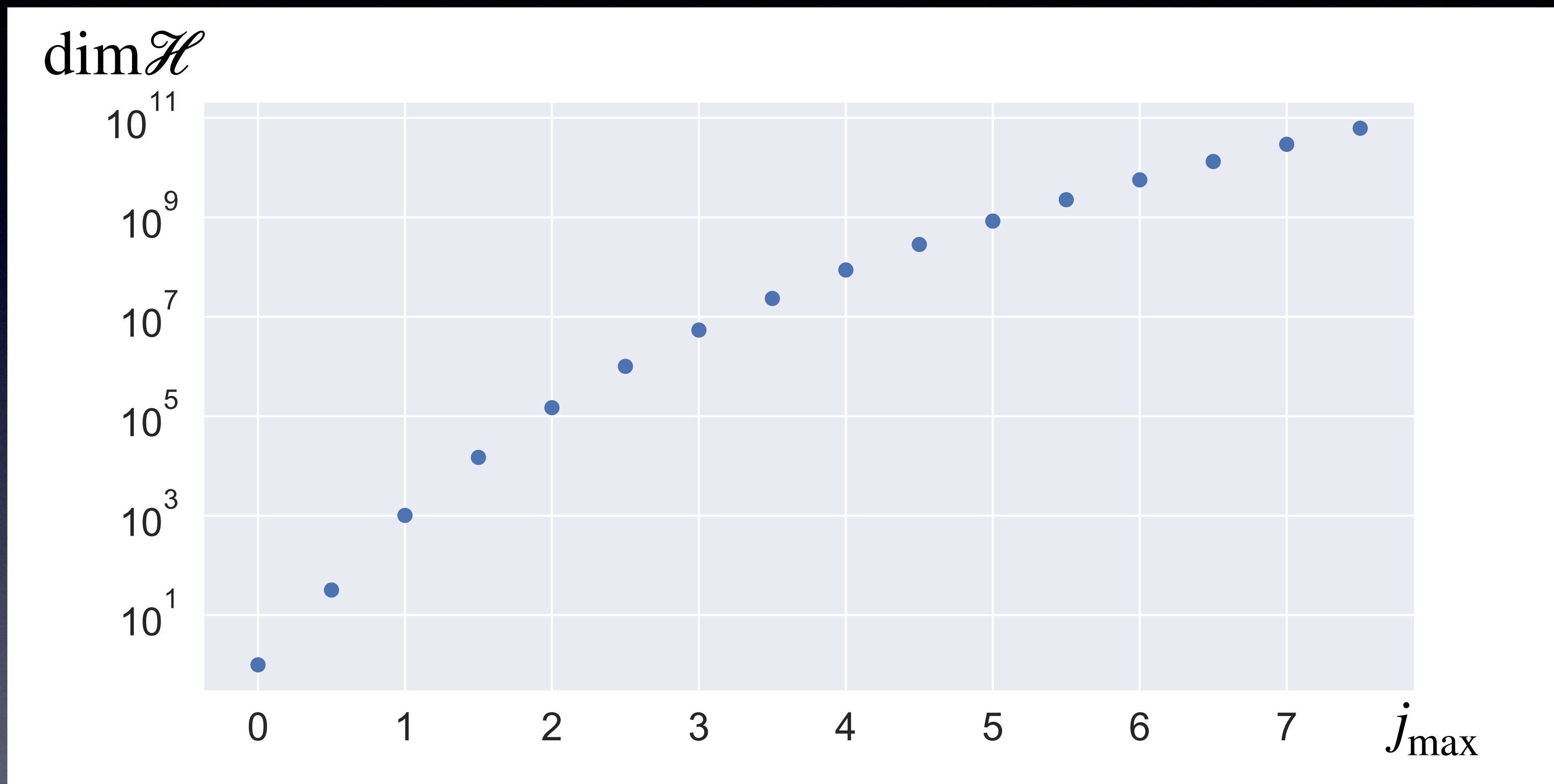
(時間に依存しない)

エネルギーを決めるとそのエネルギーを
期待値として再現するカノニカル分布が
定義できる

$$E = \langle H \rangle_{\text{eq}} := \text{tr} \rho_{\text{eq}} H \quad \text{with} \quad \rho_{\text{eq}} = \frac{e^{-\beta H}}{\text{tr} e^{-\beta H}}$$

数值計算結果

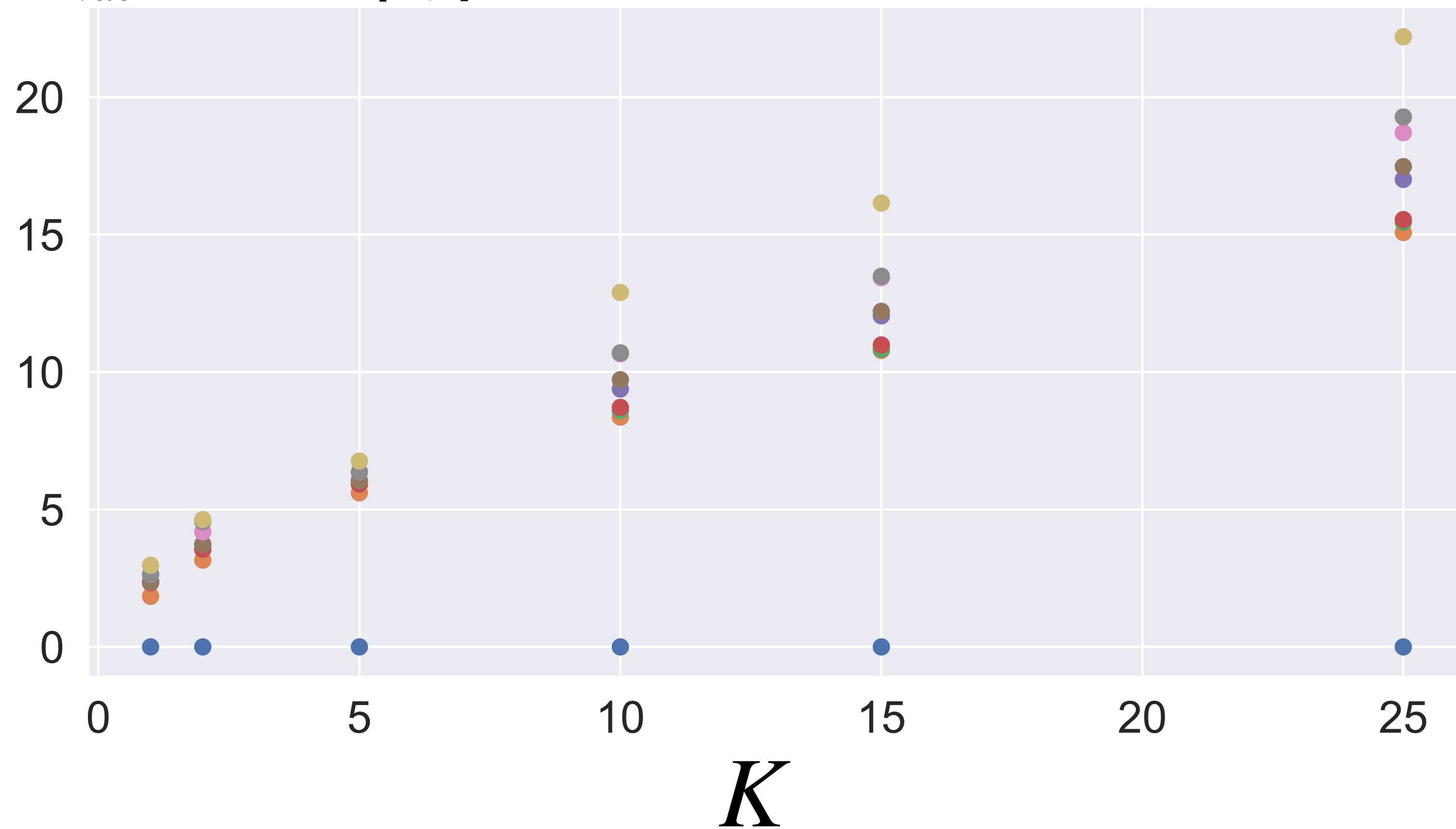
ヒルベルト空間の次元



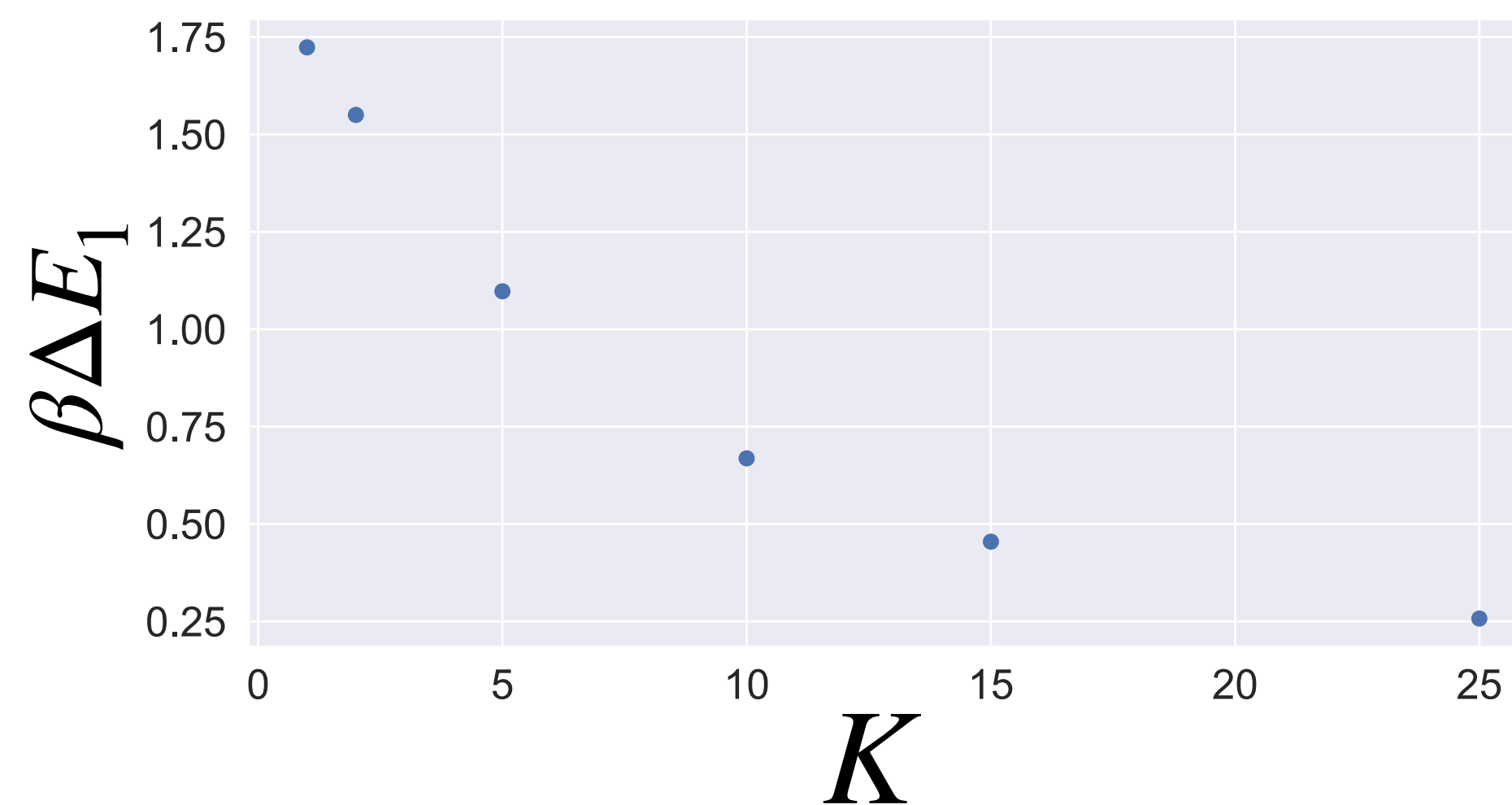
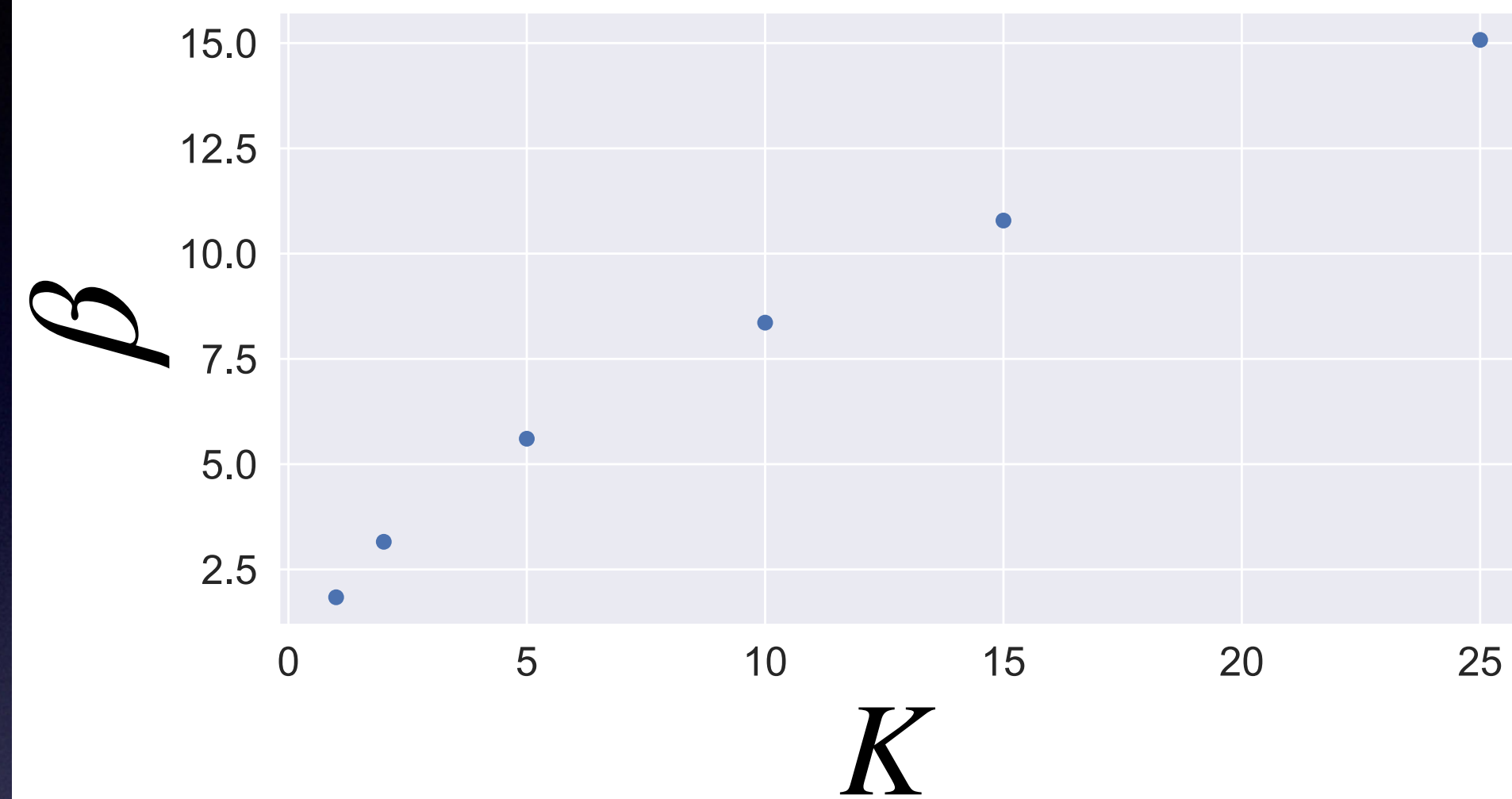
$j_{\max} = 4$ を用いる : $\dim \mathcal{H} = 87,426,119$

$j_{\max} = 4$ についてのエネルギー固有値

$E - E_{\text{vac}}$ 最初の 9 つについて



温度のK依存性



第一励起エネルギー

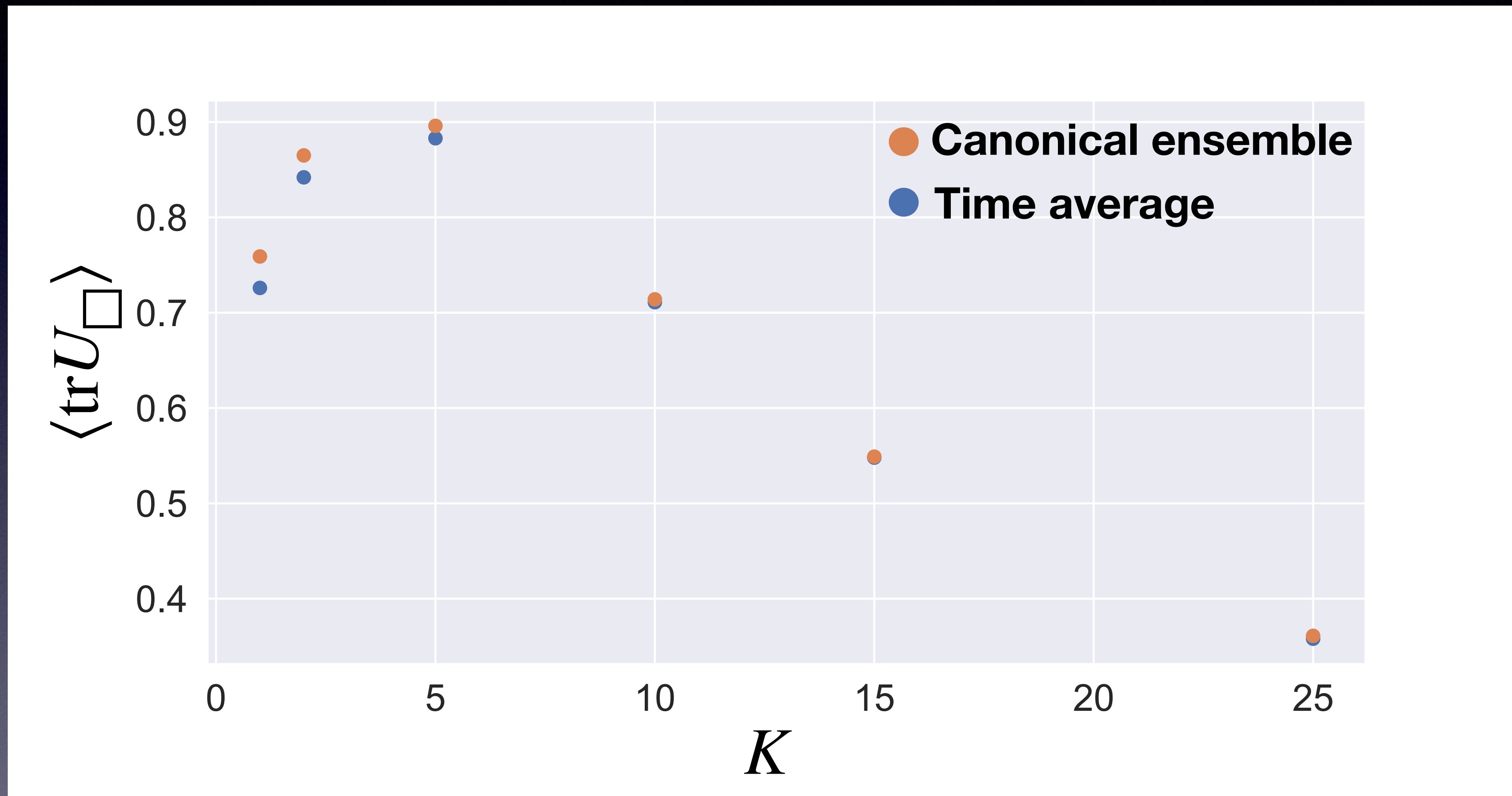
$$\Delta E_1 : E_1 - E_0$$

典型的なエネルギースケール

$$\beta\Delta E_1 > 1 \quad \text{低温}$$

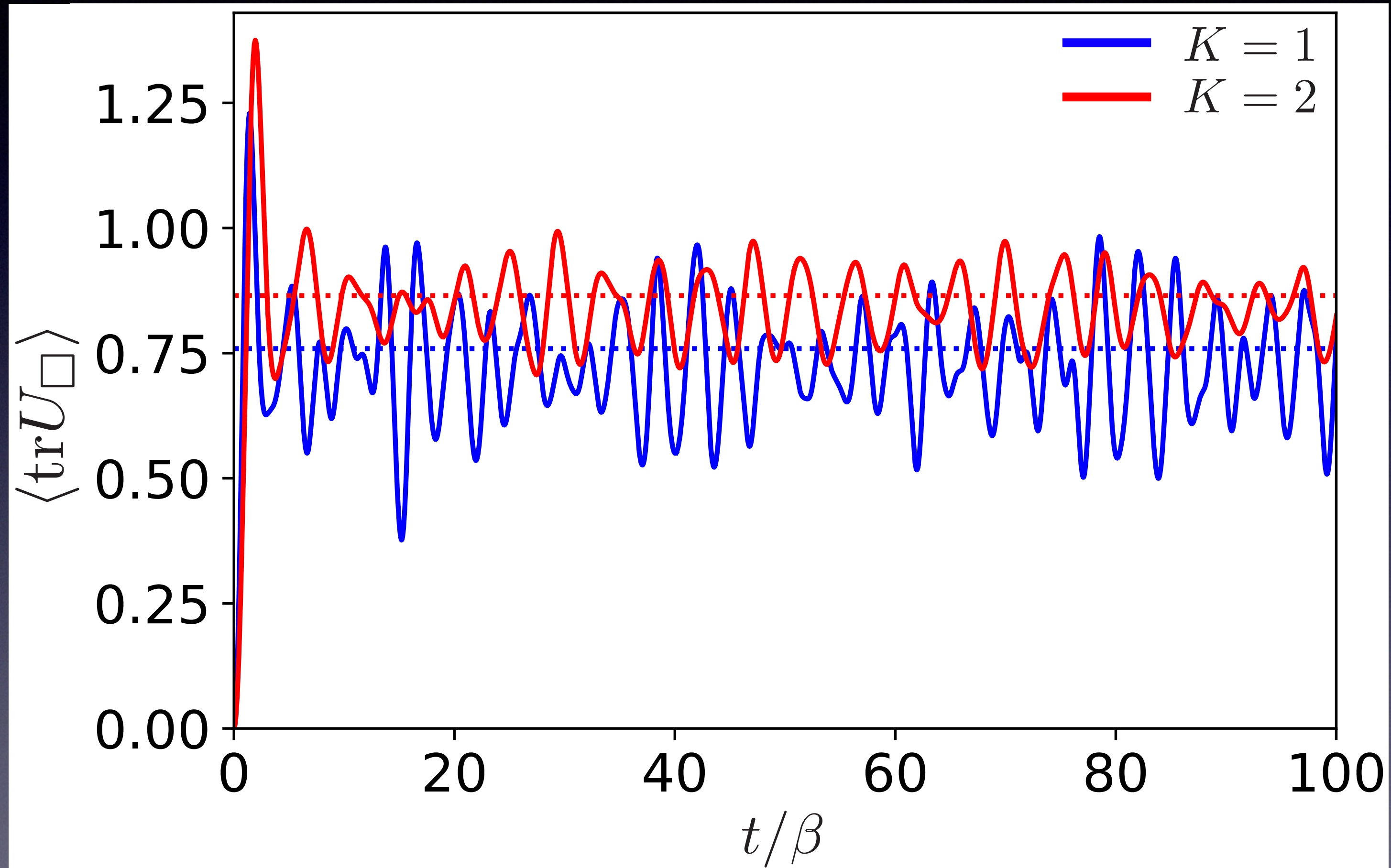
$$\beta\Delta E_1 < 1 \quad \text{高温}$$

長時間平均 vs カノニカルアンサンブル



$K > 5$ について差は1%未満

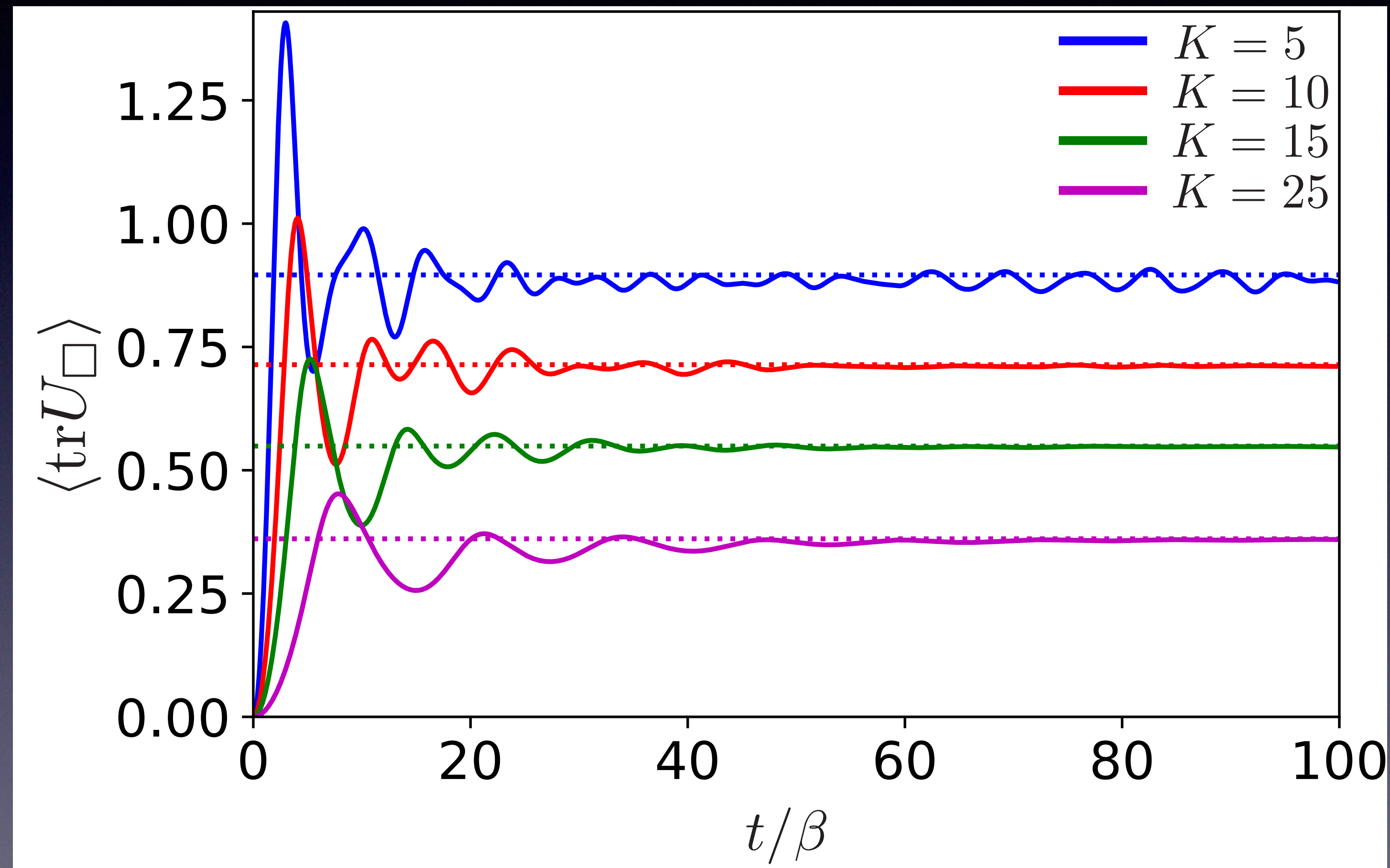
Wilsonループの期待値 強結合(低温T)



ゆらぎは小さくない

Wilsonループの期待値

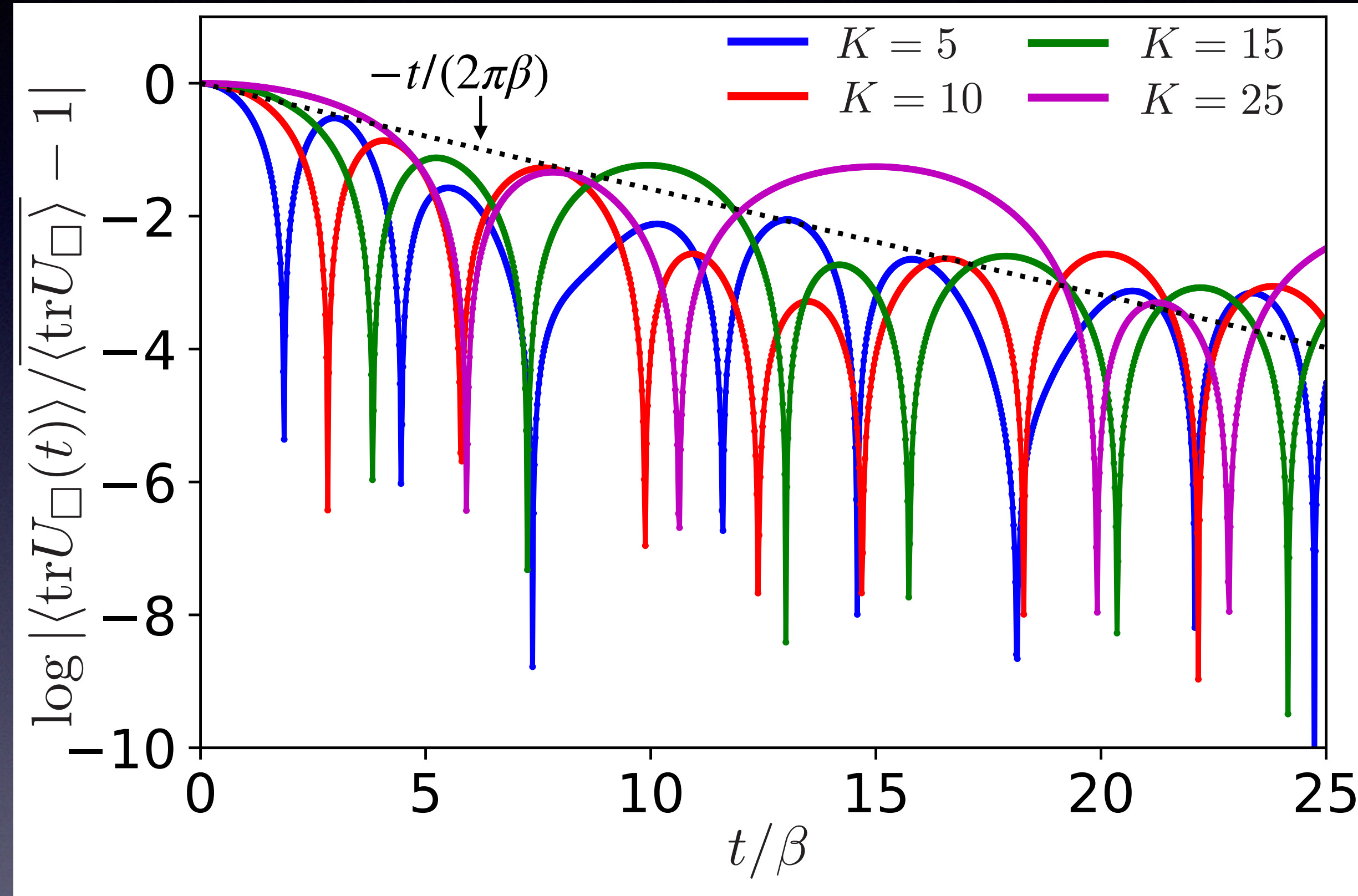
弱結合(高温T)



定常状態が観測された

平衡状態への緩和

$$\langle \text{tr} U_{\square}(t) \rangle - \overline{\langle \text{tr} U_{\square} \rangle} \sim e^{-t/\tau_{\text{eq}}}$$



これらはBoltzmann時間に近い $2\pi\beta$.

まとめ

●基礎編

Kogut-Susskindのハミルトニアン形式
量子群変形をしてSpin模型にマッピング

●応用編

(2 + 1)次元 $SU(3)_k$ ゲージ理論の量子相転移

(1 + 1)次元QCDの有限密度系の解析

(3 + 1)次元小さい系でのYang-Mills理論の熱化

展望

- SU(3)でのシミュレーション

SU(3)kのF-moveの表式を知る必要がある

$$= \sum_{f, \mu, \nu} [F_d^{abc}]_{(e, \alpha, \beta)(f, \mu, \nu)}$$

- 高次元系
- 大きい系, 連続極限
- 量子コンピュータでシミュレーション