

DMRGを用いたゲージ理論の質量スペクトル計算 と

[arXiv:2307.16655](https://arxiv.org/abs/2307.16655)

TRGで見るラージNゲージ理論

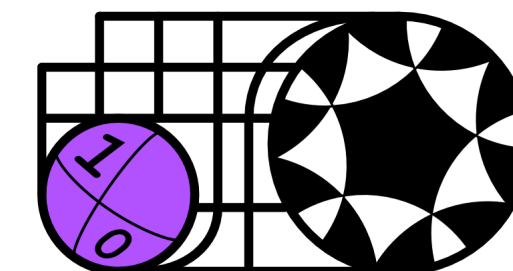
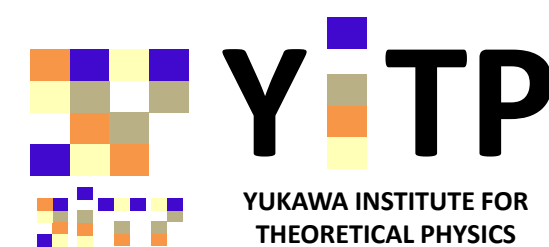
JHEP12 (2021) 011

[arXiv:2110.05800](https://arxiv.org/abs/2110.05800)

松本 祥

(YITP Kyoto U, RIKEN iTHEMS)

Tensor Network 2023, 14 Nov. 2023 @筑波大学CCS



Section 1

DMRGを用いたゲージ理論の質量スペクトル計算

collaboration with

伊藤 悦子 (YITP Kyoto U, RIKEN iTHEMS) and 谷崎 佑弥 (YITP Kyoto U)

[arXiv:2307.16655](https://arxiv.org/abs/2307.16655)

ハミルトニアン形式でのQFTの数値計算

Lagrangian formalism

- Monte Carlo シミュレーション (格子QCD)
 - 👍 ゲージ不変性
 - 👍 確立されたアルゴリズム

- テンソルネットワーク (TRG, HOTRG, ...)

Hamiltonian formalism

- テンソルネットワーク (MPS, PEPS, ...)
- 量子計算
 - 👍 符号問題がない
 - 👍 励起状態を用いた解析

相補的なアプローチになり得る

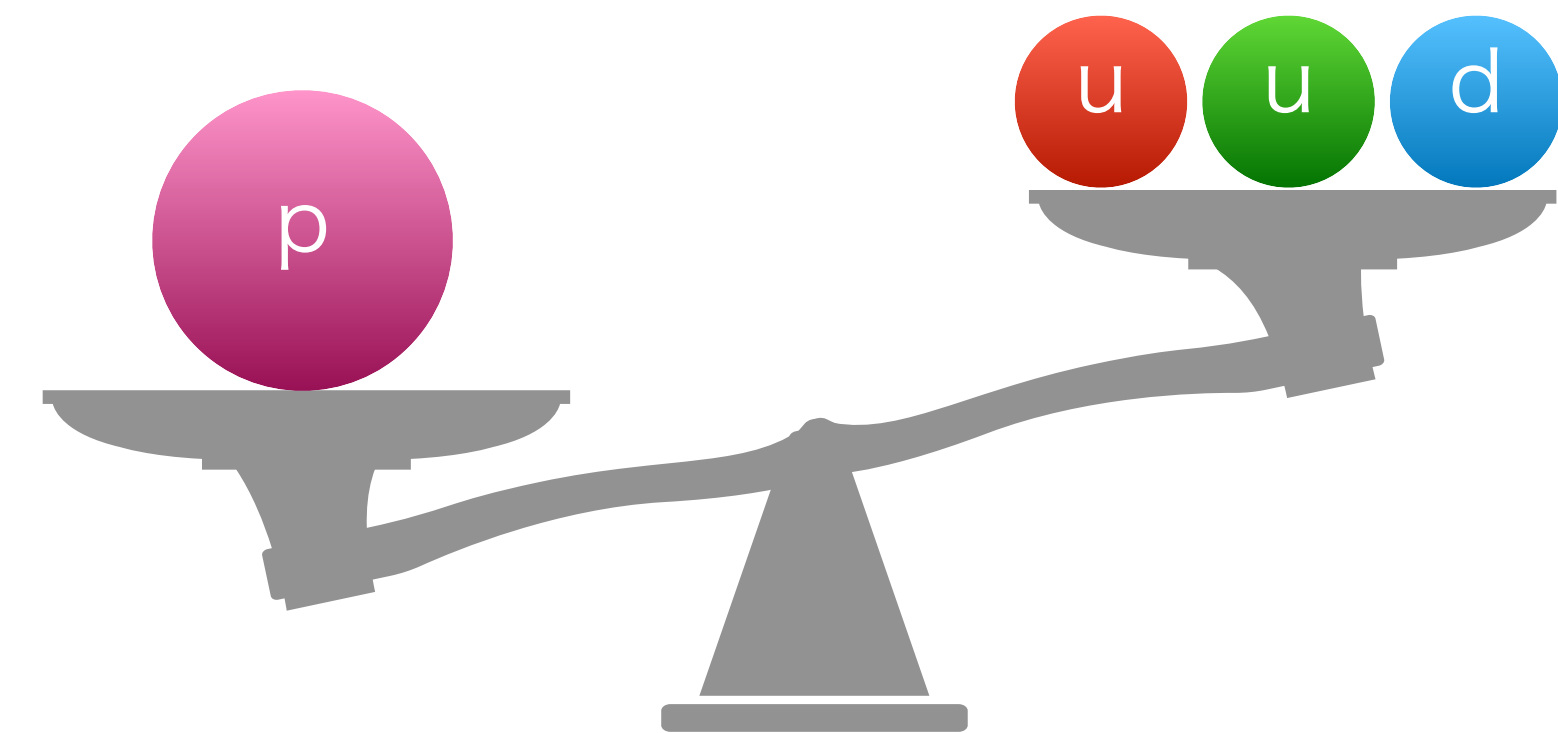
ハミルトニアン形式において
ゲージ理論(QCD)の物理量を効率的に計算するには？

複合粒子(ハドロン)の質量スペクトル

- QCDにおける複合粒子(ハドロン)の質量

u/d クォーク : 2~5 MeV

陽子 (uud) : 938 MeV \gg $2m_u + m_d$

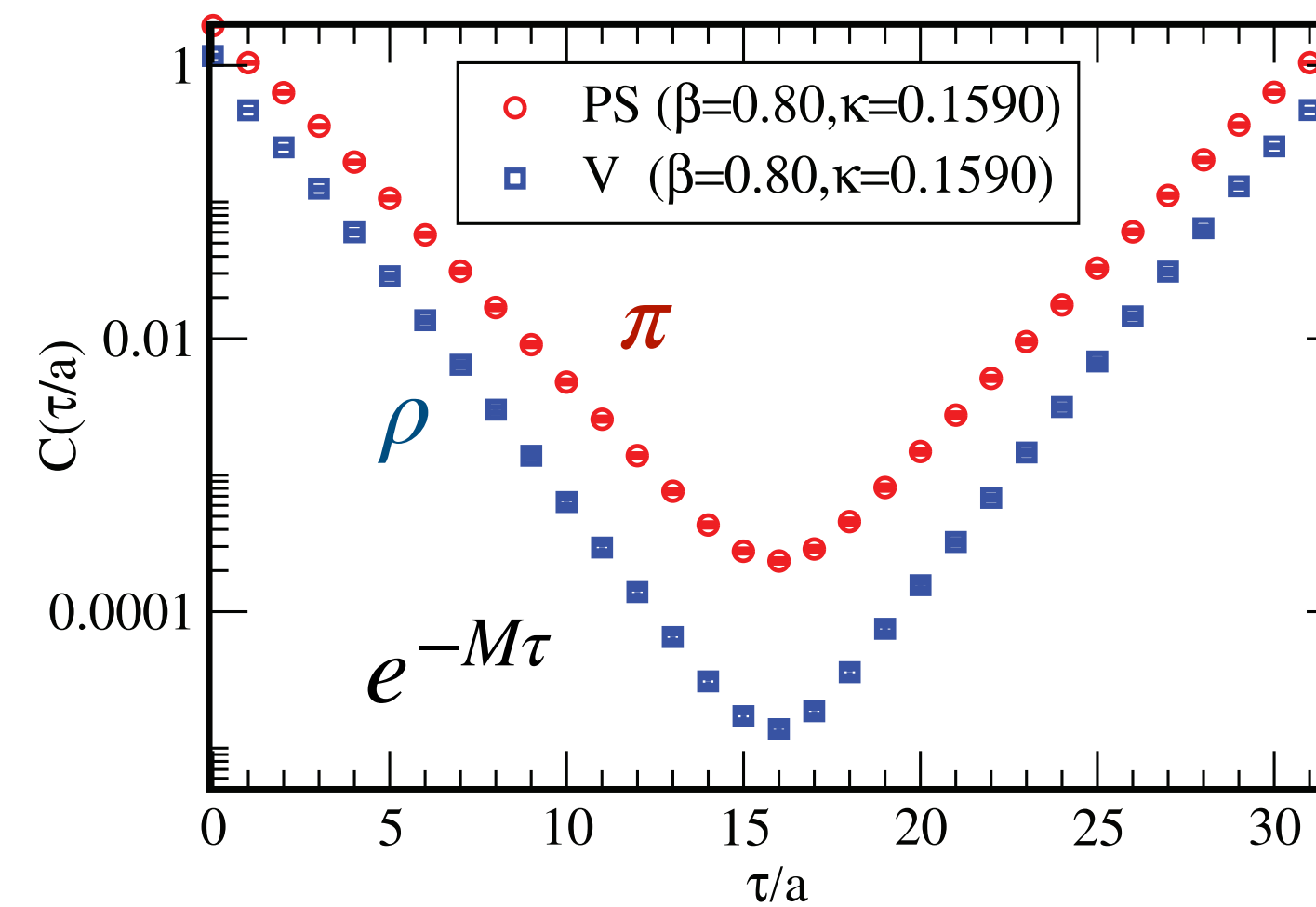


- lattice Monte Carlo simulation

による非摂動計算

(ラグランジアン形式)

- ハドロン質量は
虚時間相関関数から計算
→ 実験値を再現



[Iida et al. (2021)]

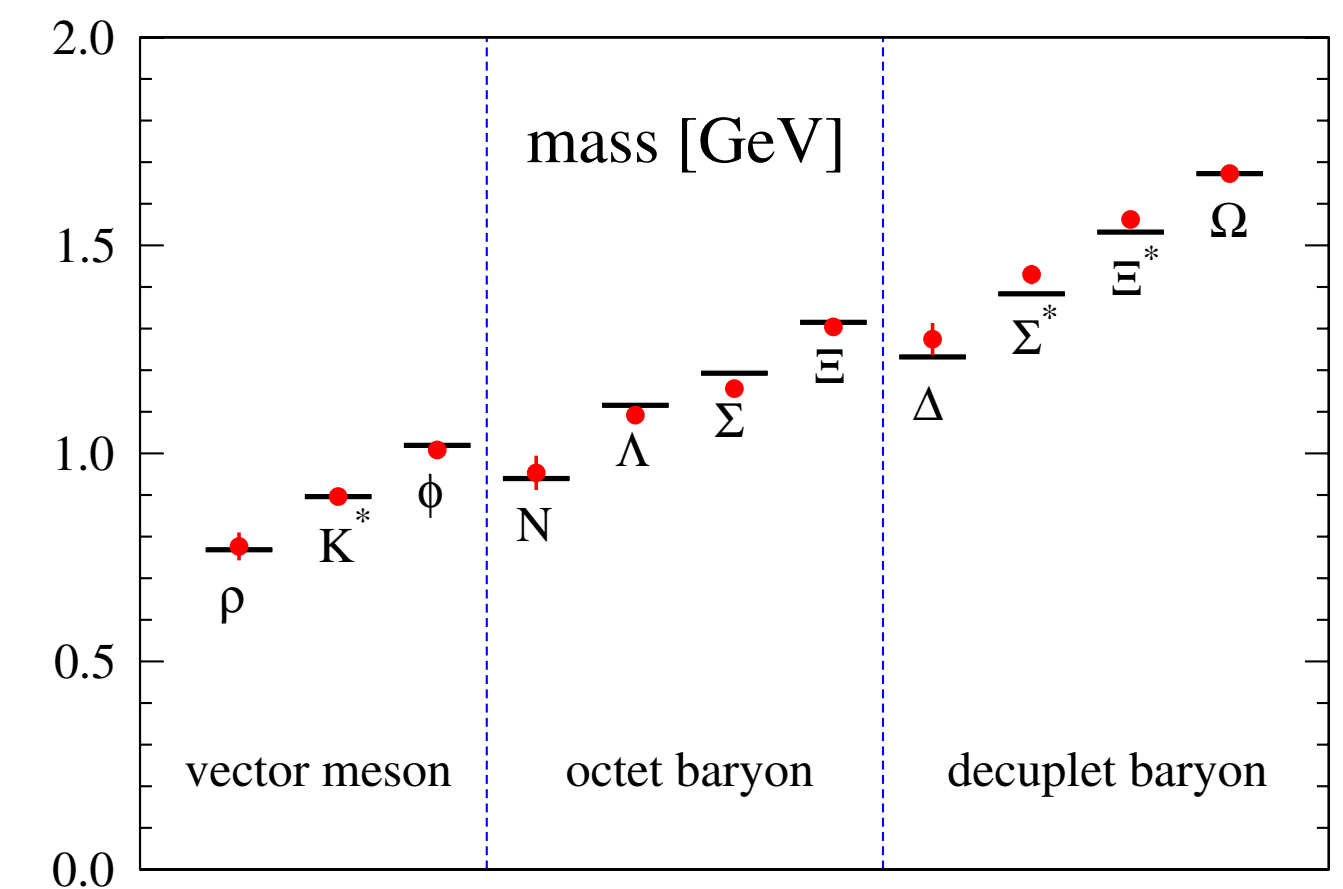


FIG. 24 (color online). Light hadron spectrum extrapolated to the physical point using m_π , m_K and m_Ω as input. Horizontal bars denote the experimental values.

[PACS-CS collab. (2009)]

Schwinger模型への適用

Schwinger模型 (QED_{1+1d})

- 簡単ながら非自明なゲージ理論であり、QCDと似た性質を持つ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{f=1}^{N_f} \left[i\bar{\psi}_f \gamma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu) \psi_f - m\bar{\psi}_f \psi_f \right]$$

$\theta \neq 0$ では符号問題が生じる

Nf=1

- 先行研究: chiral condensate, $q\bar{q}$ potential, mass spectrum, ...

[Chakraborty et al. (2022)]

[Honda et al. (2022)]

[Banuls et al. (2013)] ...

Nf=2

- QCDのanalogyとしての“ハドロソ” → good testing ground
- Nf=1 と比べて解析計算が限定的 (bosonizationをしても強結合)

[Funcke et al. (2023)]

[Dempsey et al. (2023)] ...

[Coleman (1976)]

2-flavor Schwinger模型の複合粒子

“メソン” (ハドロンの一種)

$$\pi = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 - \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2) : J^{PG} = 1^{-+}$$

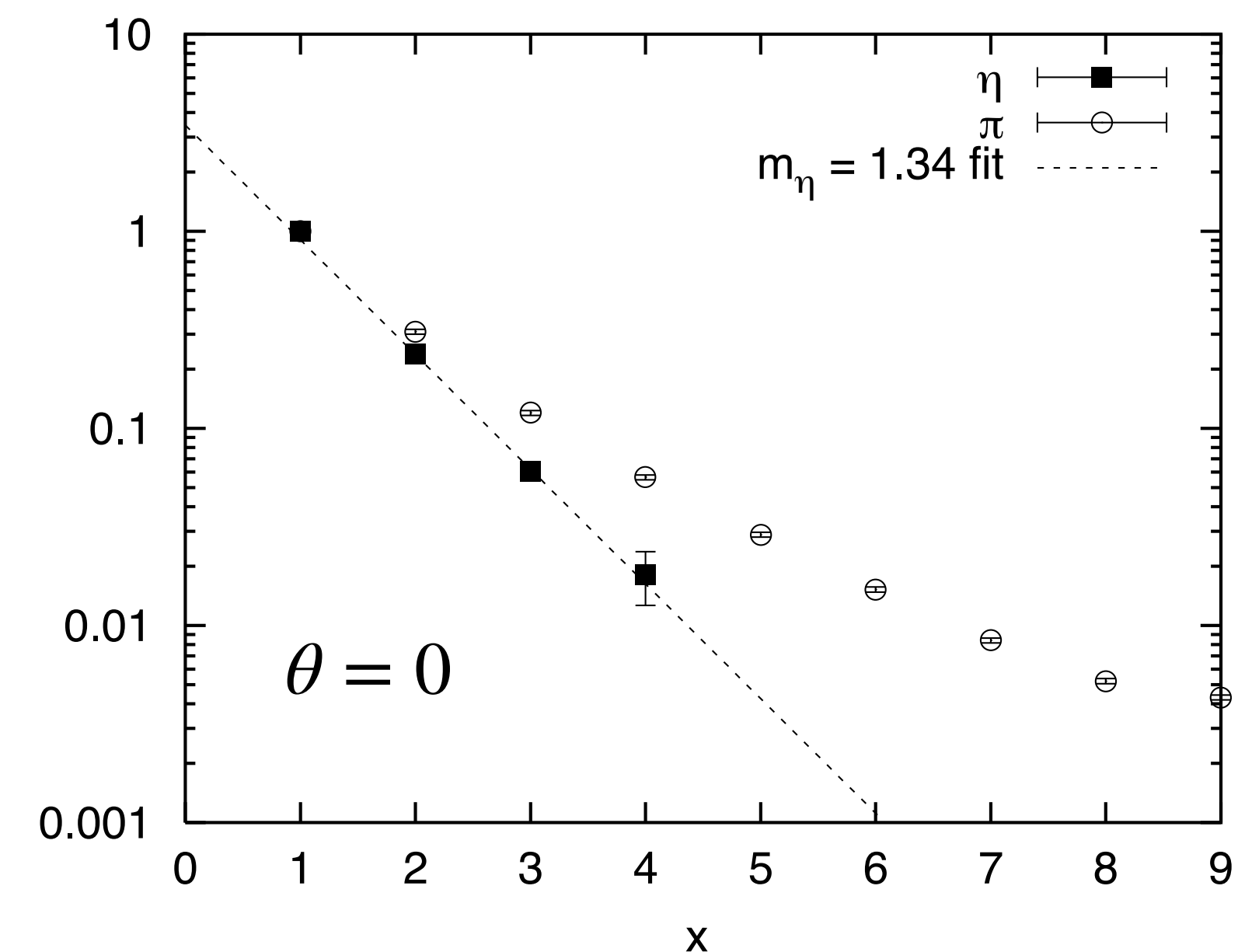
$$\eta = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 + \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2) : J^{PG} = 0^{--}$$

$$\sigma = \bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2 : J^{PG} = 0^{++}$$

量子数

- isospin J : flavor doubletに作用するSU(2)対称性
- parity P
- G-parity $G = Ce^{i\pi J_y}$ (C の一般化)

Monte Carlo法による先行研究



[Fukaya & Onogi (2003)]

u/d クォークを含むQCDのtoy model

Short summary

- 複合粒子の質量スペクトルの計算方法
 - (1) correlation-function scheme — 格子QCDでも用いられる一般的手法
 - (2) one-point-function scheme — boundary effectを有効活用
 - (3) dispersion-relation scheme — 励起状態を直接取得する
- テンソルネットワーク(DMRG)を用いて、2-flavor Schwinger模型で検証
- 3つの方法による結果は互いに無矛盾

Calculation strategy

- 格子上のハミルトニアン (staggered fermion + open boundary)

$$H = \frac{g^2 a}{2} \sum_{n=0}^{N-2} \left(L_n + \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 + \sum_{f=1}^{N_f} \left[\frac{-i}{2a} \sum_{n=0}^{N-2} \left(\chi_{f,n}^\dagger U_n \chi_{f,n+1} - \chi_{f,n+1}^\dagger U_n^\dagger \chi_{f,n} \right) + m_{\text{lat}} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \chi_{f,n}^\dagger \chi_{f,n} \right]$$

- Gauss lawを解きゲージ場 L_n を消去

[Kogut & Susskind (1975)]

[Dempsey et al. (2022)]

- ゲージ固定 $U_n = 1$

- Jordan-Wigner変換 for $N_f=2$

$$\chi_{1,n} = \sigma_{1,n}^- \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z), \quad \chi_{2,n} = \sigma_{2,n}^- (-i\sigma_{1,n}^z) \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z)$$

→ 有限次元のヒルベルト空間を持つスピン系のハミルトニアン

密度行列繰り込み群 (DMRG)

[White (1992)] [Schollwöck (2005)]

MPSをansatzとして H の固有状態を**変分法**により求める

- コスト関数：エネルギー $E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$
- E が減少するように $A_i(s_i)$ をupdate
- MPS近似の精度を決める **cutoff parameter ε** を導入
特異値分解において、 ε より小さい特異値は無視
small $\varepsilon \longleftrightarrow$ large $D_i \longleftrightarrow$ high accuracy \longleftrightarrow high cost

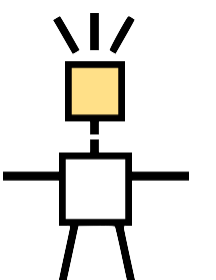
$$|\Psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} \text{Tr} [A_0(s_0) A_1(s_1) \cdots] |s_0 s_1 \cdots\rangle$$

$A_i(s_i) : D_{i-1} \times D_i$ 行列

$D_i : \text{bond次元}$

- 第 ℓ 励起状態 $|\Psi_\ell\rangle \rightarrow$ コスト関数： $\langle \Psi_\ell | H | \Psi_\ell \rangle + W \sum_{\ell'=0}^{\ell-1} \left| \langle \Psi_{\ell'} | \Psi_\ell \rangle \right|^2$

本研究の計算には、ITensorのC++ libraryを用いた [Fishman et al. (2022)]



数値計算の結果

(1) Correlation-function scheme

(2) One-point-function scheme

(3) Dispersion-relation scheme

数値計算の結果

(1) Correlation-function scheme

(2) One-point-function scheme

(3) Dispersion-relation scheme

(1) Correlation-function scheme

• 空間2点相関関数： $C_\pi(r) = \langle \pi(x)\pi(y) \rangle$

• 有効質量： $M_{\pi,\text{eff}}(r) = -\frac{d}{dr} \log C_\pi(r), \quad r = |x - y|$

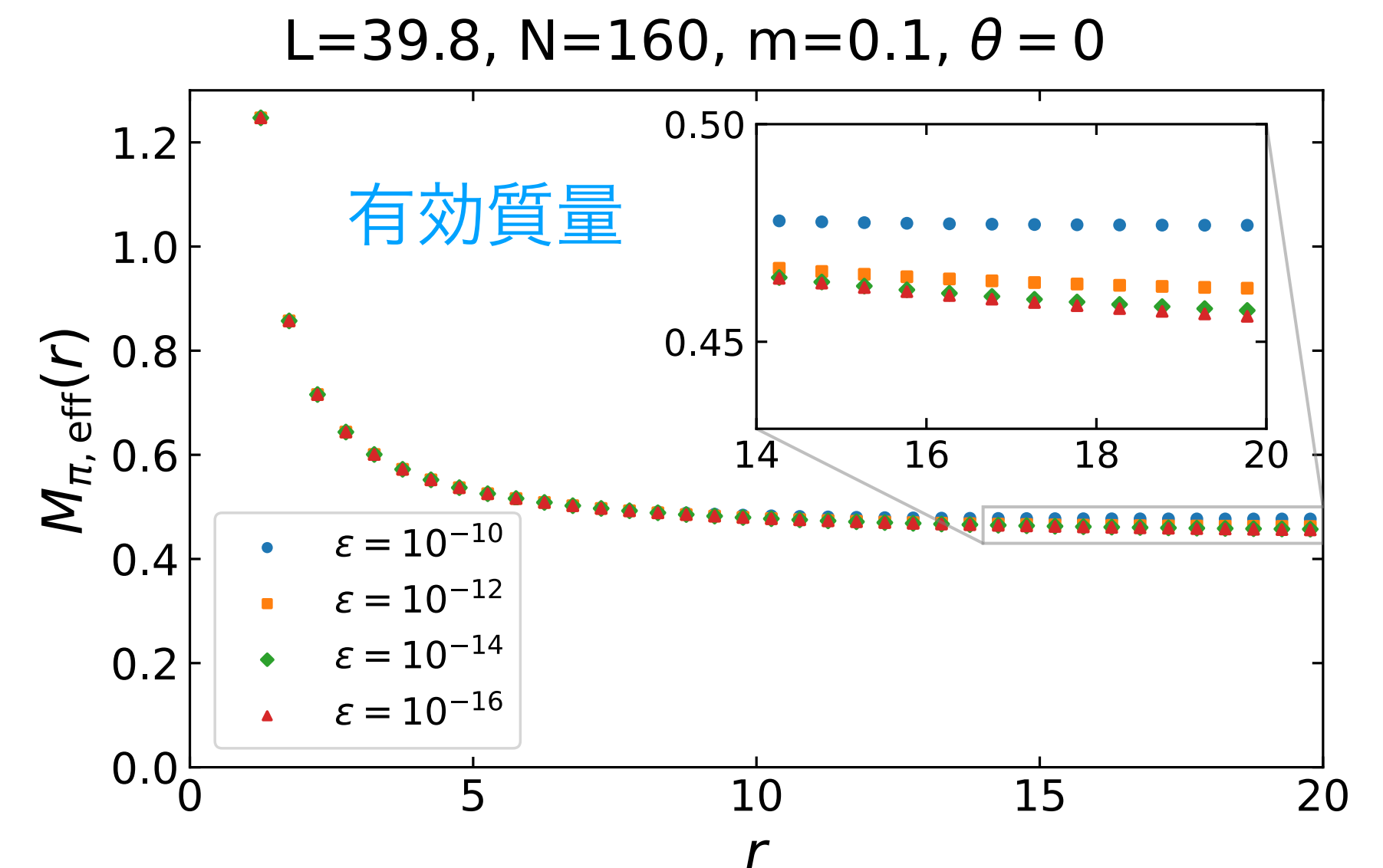
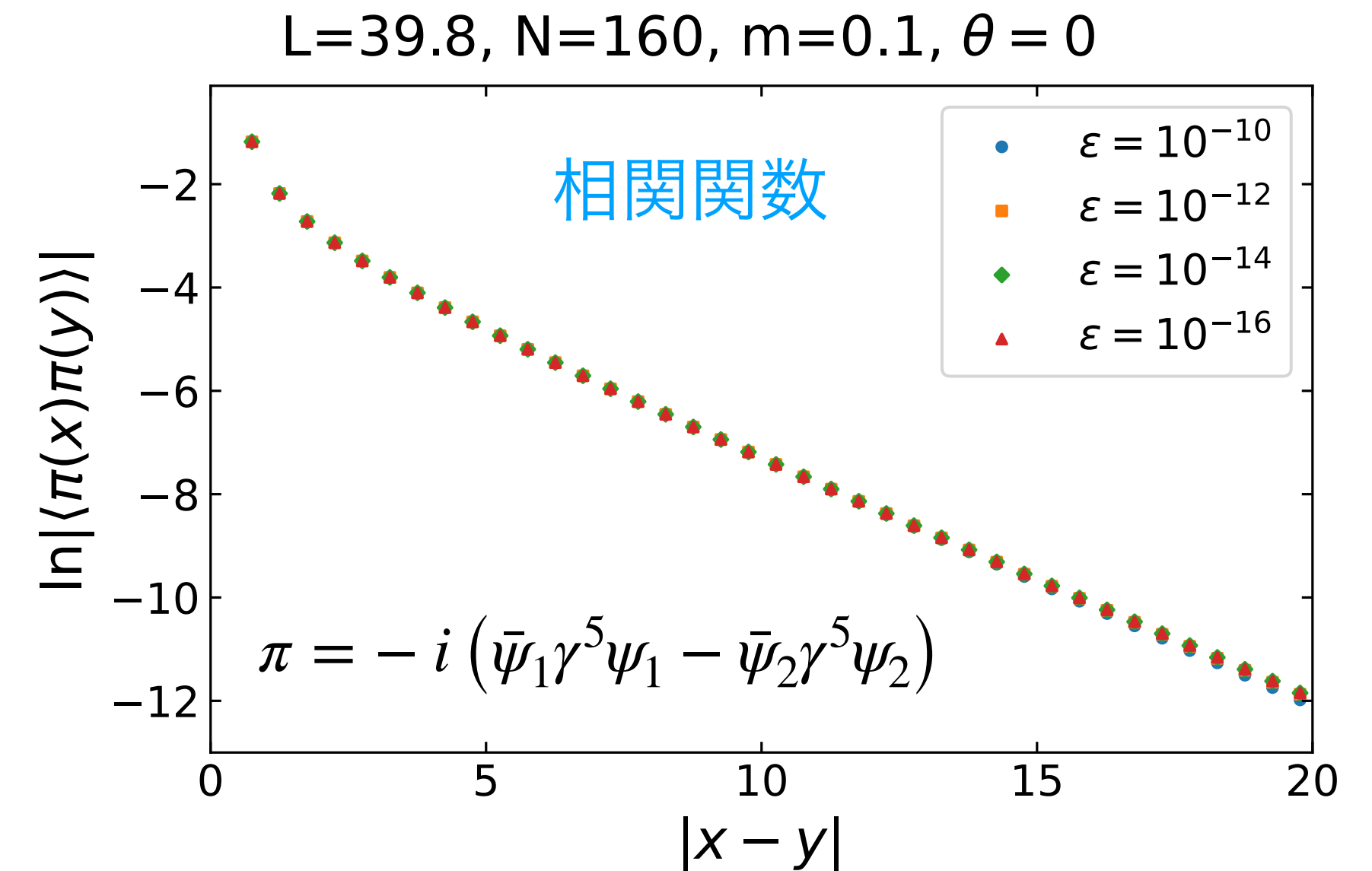
プラトーの値 = pionの質量?

⚠ 近似の精度を上げると長距離での振る舞いに変化

$\varepsilon = 10^{-10}$ ($D_i \sim 400$) : $M_{\pi,\text{eff}}(r)$ は平坦

$\varepsilon = 10^{-16}$ ($D_i \sim 2800$) : $M_{\pi,\text{eff}}(r)$ の r 依存性が見える

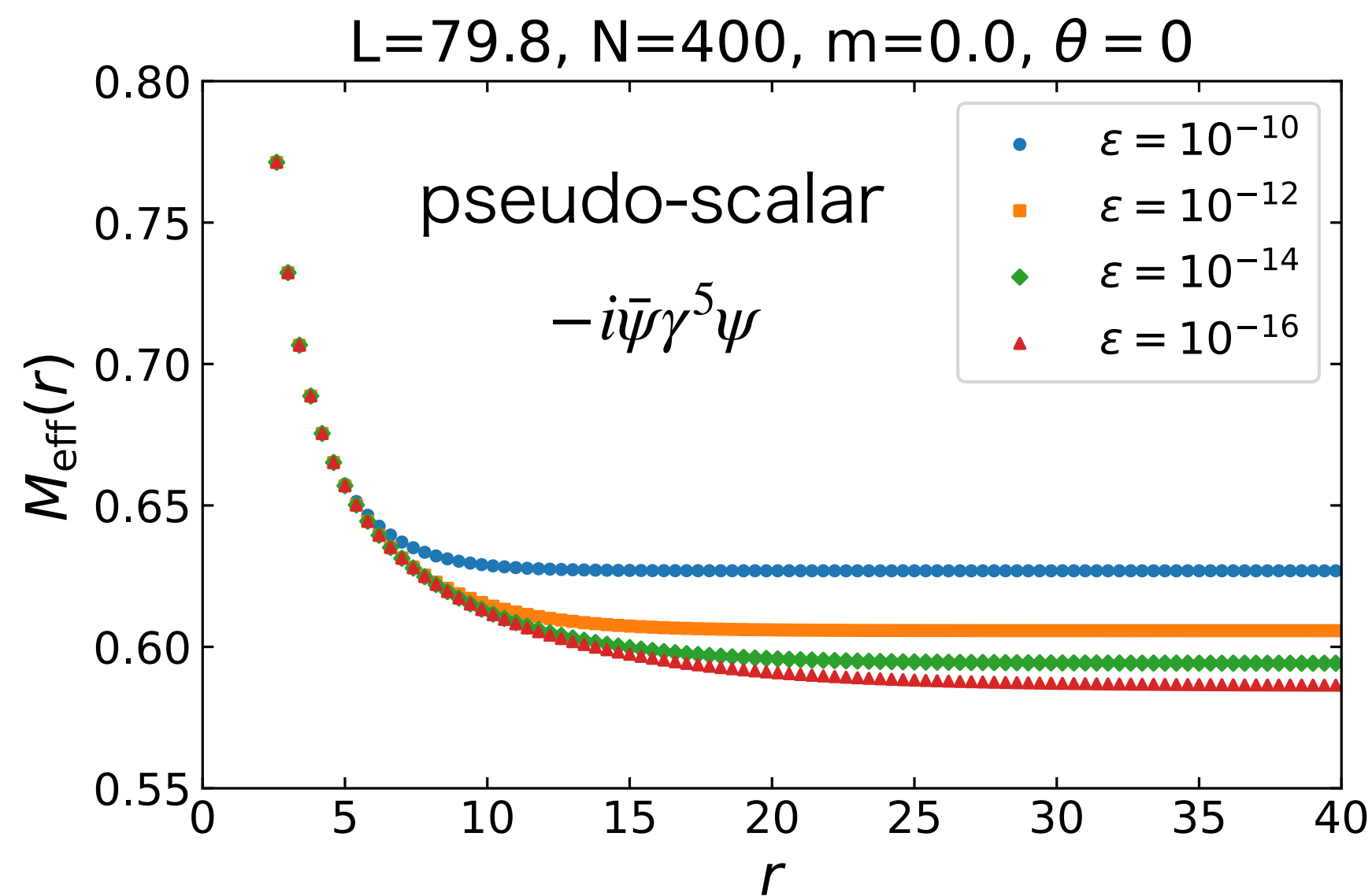
• What's happened?



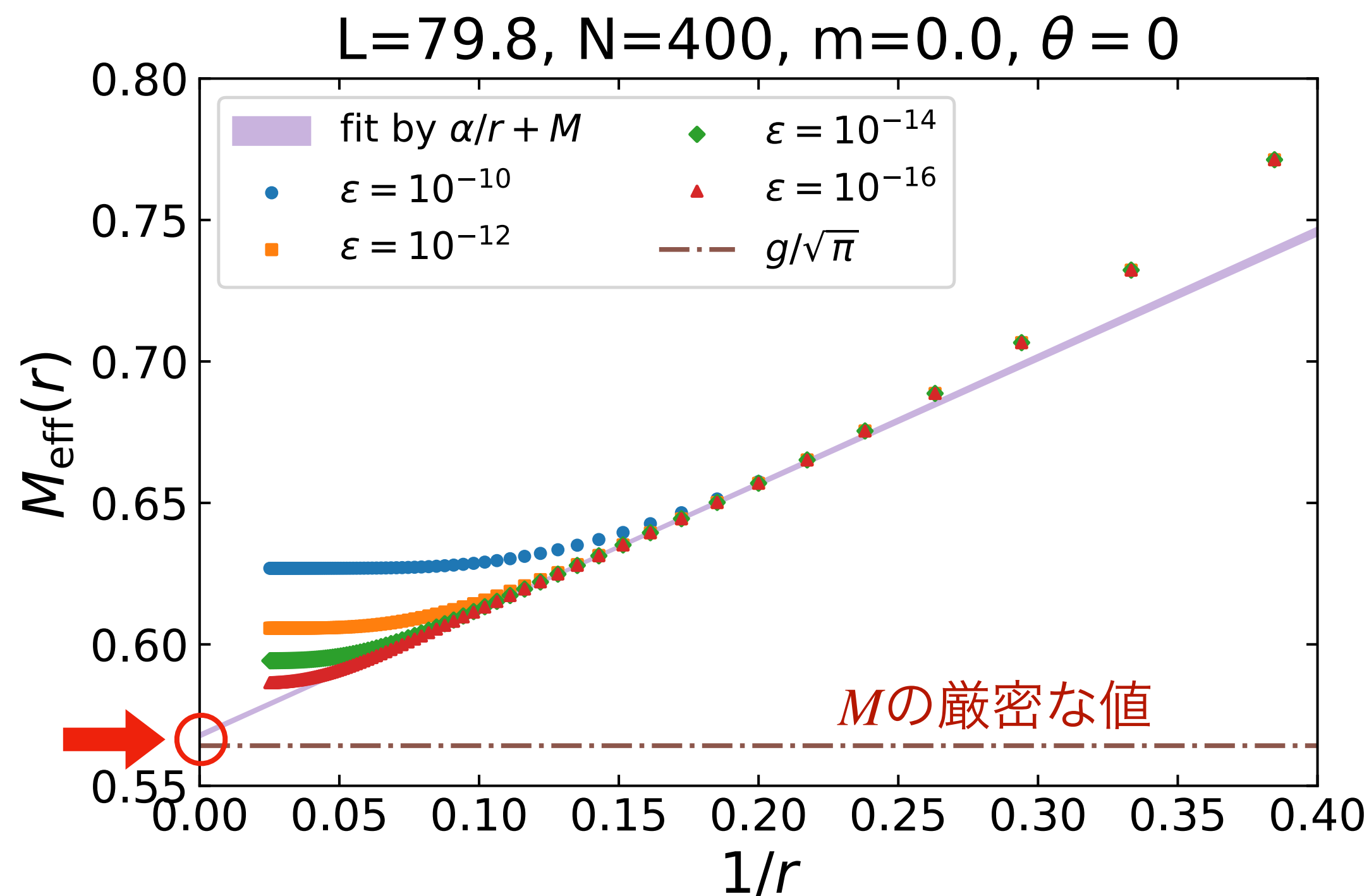
Yukawa型相関 → 有効質量の1/r補正

• (1+1)d 質量 M の自由粒子 : $\langle \phi(x,t)\phi(y,t) \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{Mr}} e^{-Mr} \rightarrow M_{\text{eff}}(r) \sim \frac{\alpha}{r} + M$

• massless Nf=1 Schwinger模型 (厳密に解ける)



→
 $\frac{1}{r}$ に対してplot



- MPSで $1/r$ 補正を再現するのは難しい
- $r \rightarrow \infty$ の外挿が必要

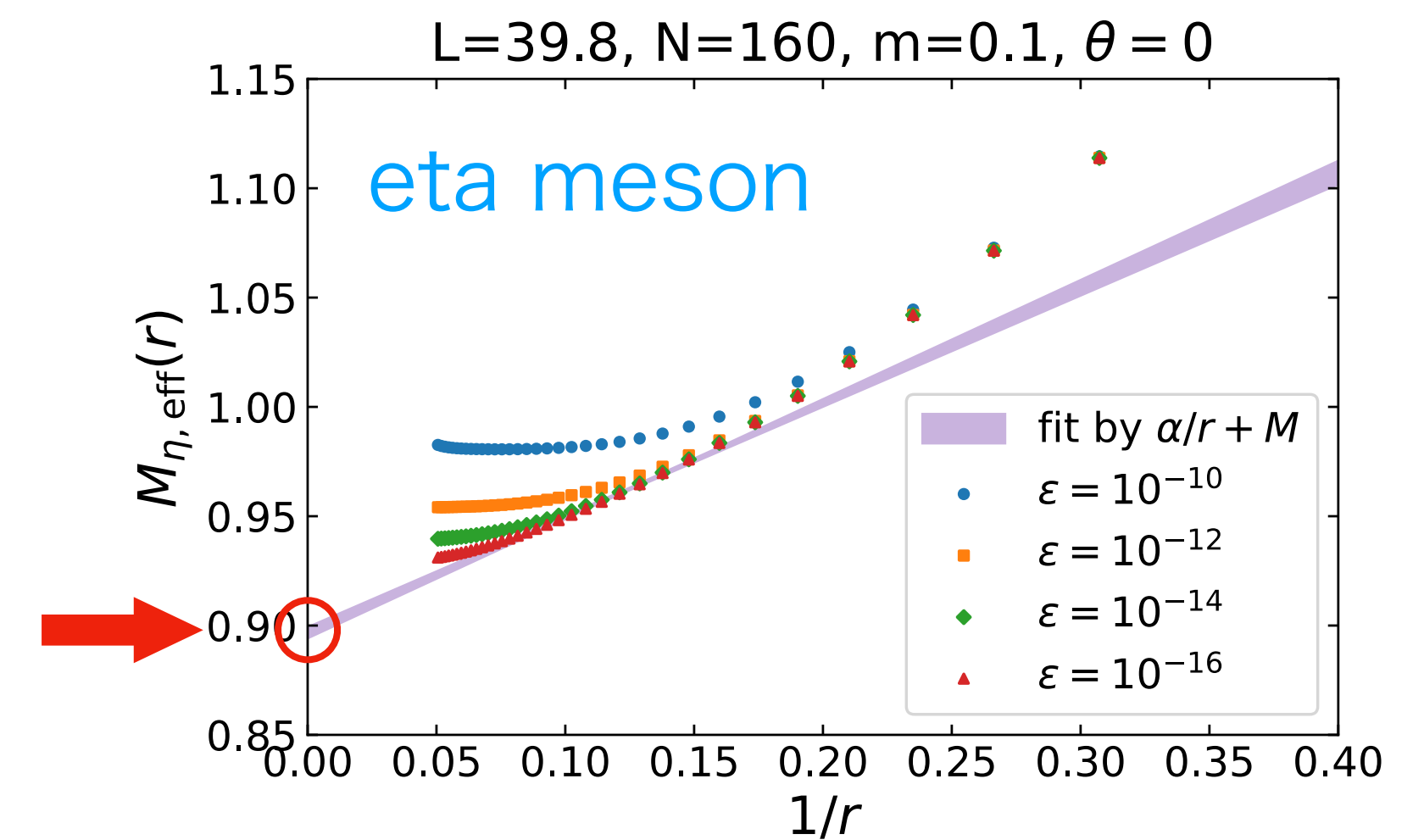
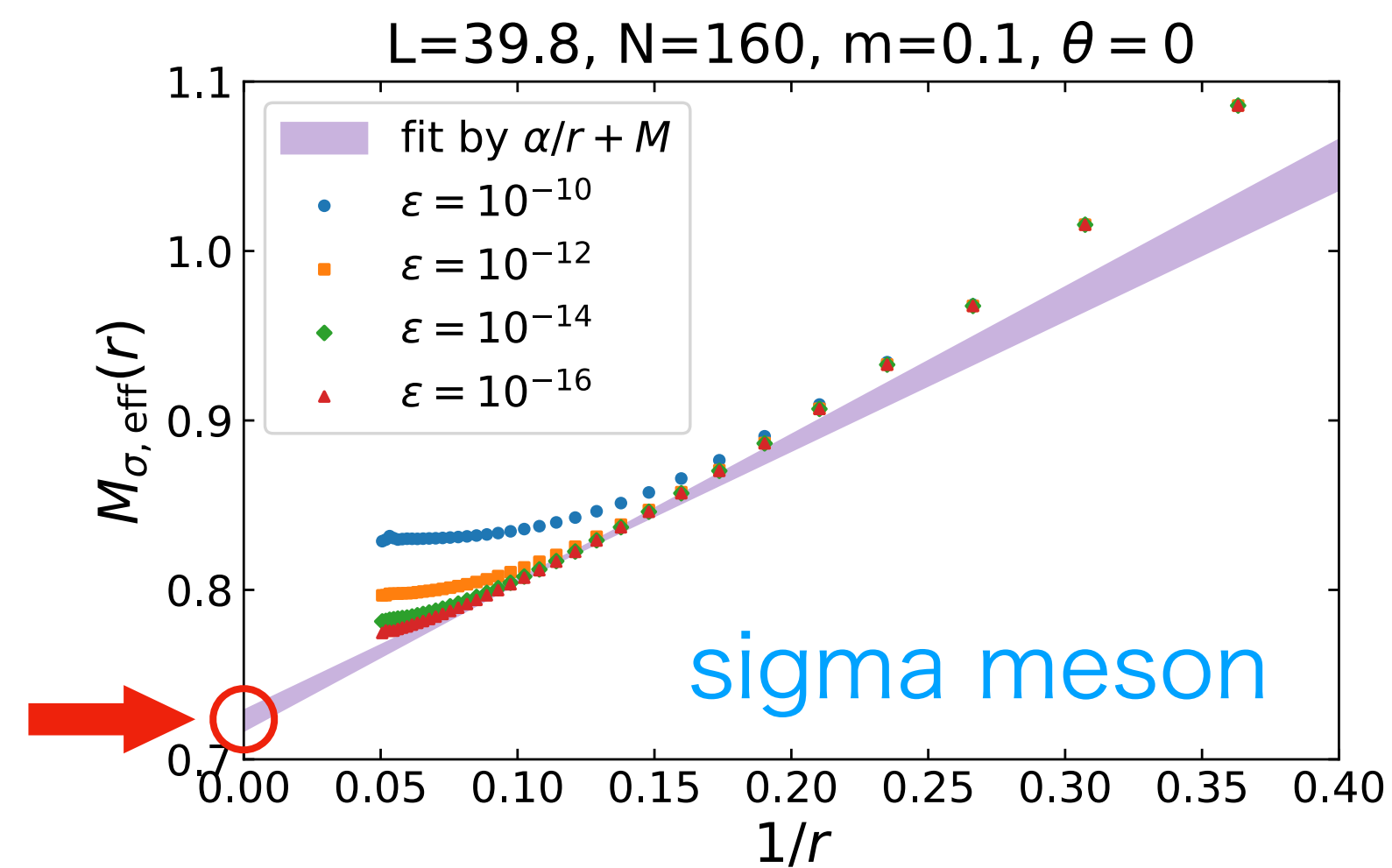
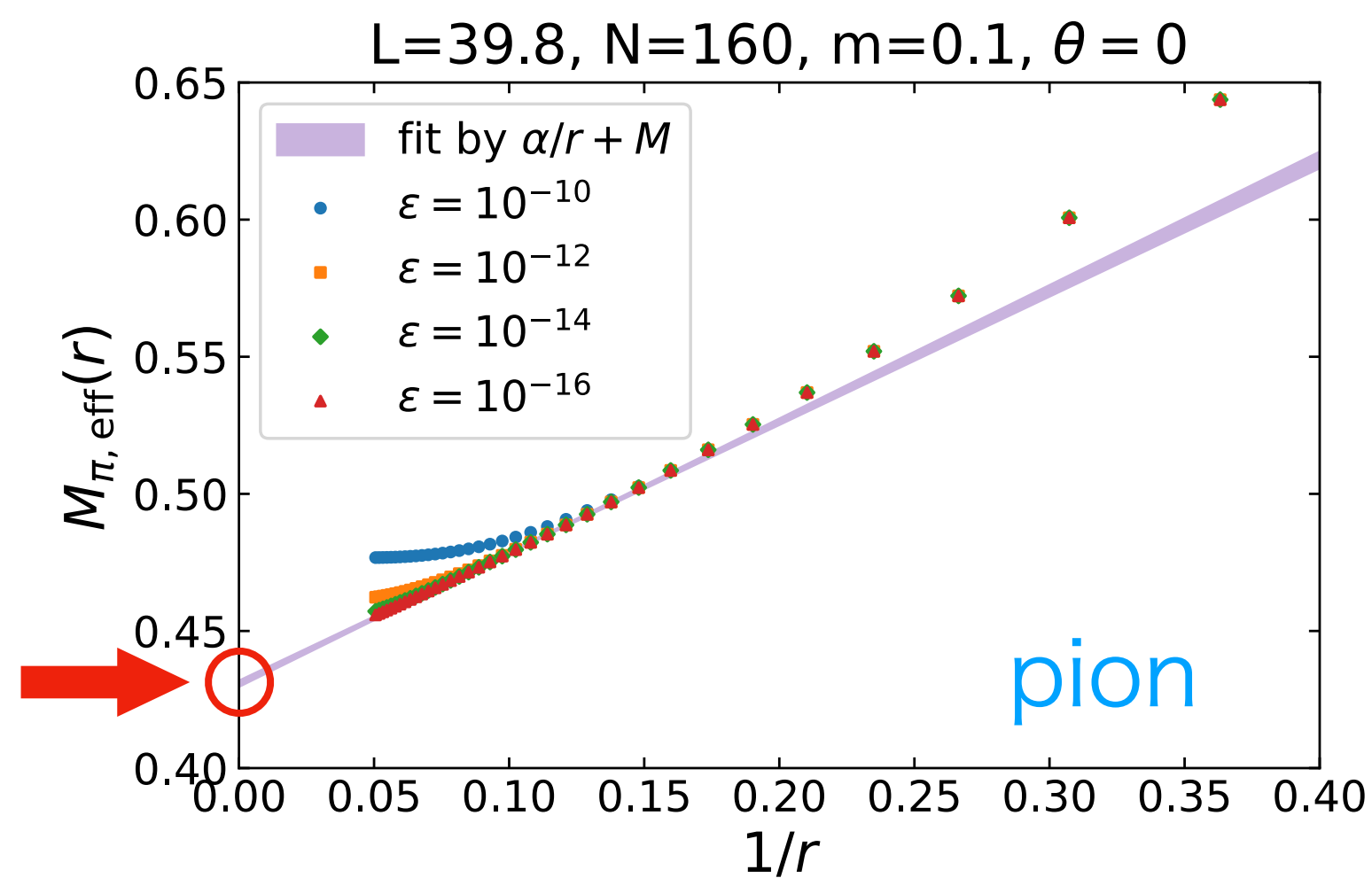
Nf=2での結果

$\varepsilon = 10^{-16}$ のデータを用いて、有効質量を $r \rightarrow \infty$ に外挿

$$\pi = -i (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma^5 \psi_2)$$

$$\sigma = \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2$$

$$\eta = -i (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \gamma^5 \psi_2)$$



	pion	sigma	eta
M	0.431(1)	0.722(6)	0.899(2)
α	0.477(9)	0.83(5)	0.51(2)

数値計算の結果

(1) Correlation-function scheme

(2) One-point-function scheme

(3) Dispersion-relation scheme

(2) one-point-fn. scheme (eta & sigma)

- $\theta = 0$ では open boundary が iso-singlet の source となる (~wall source)

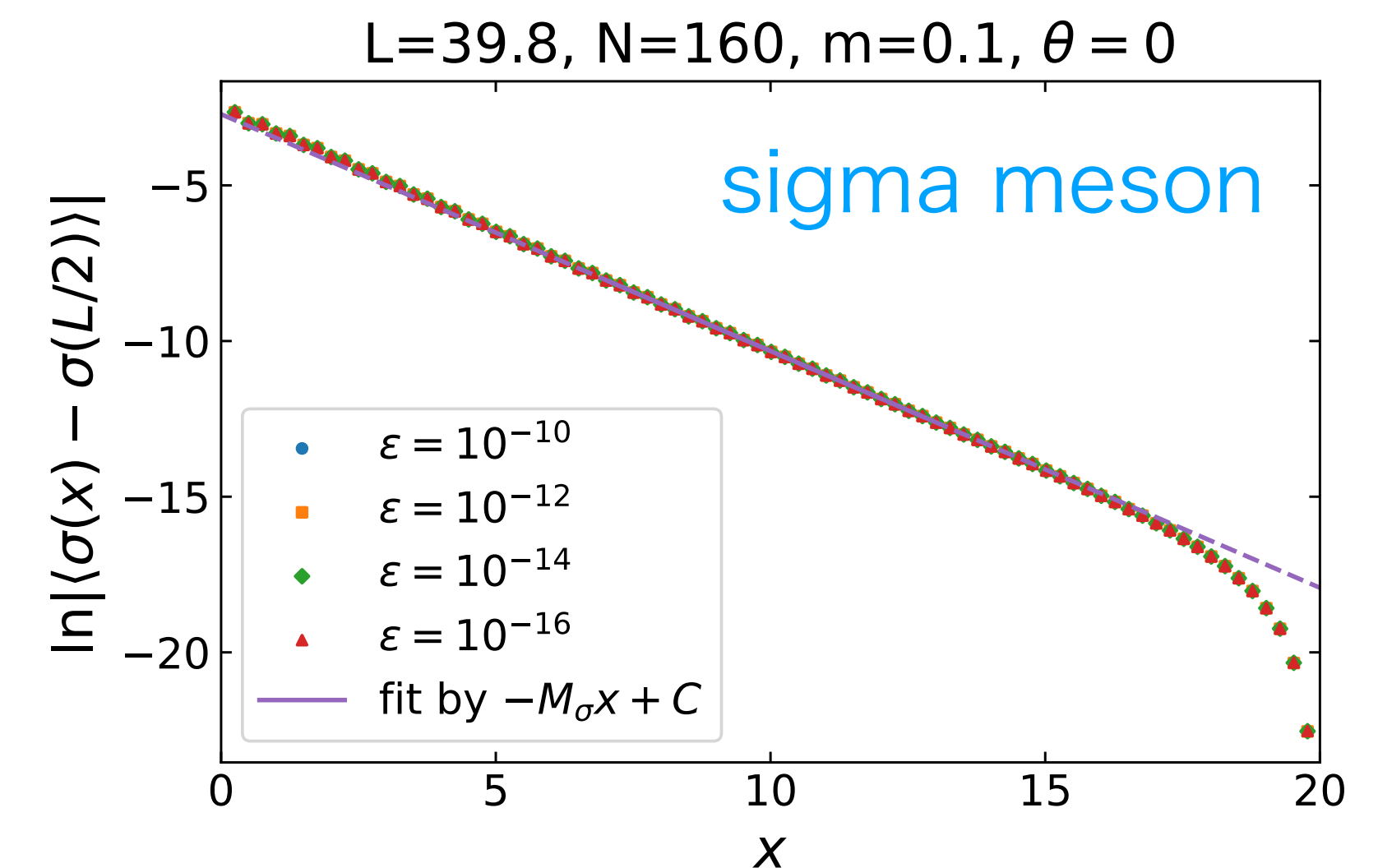
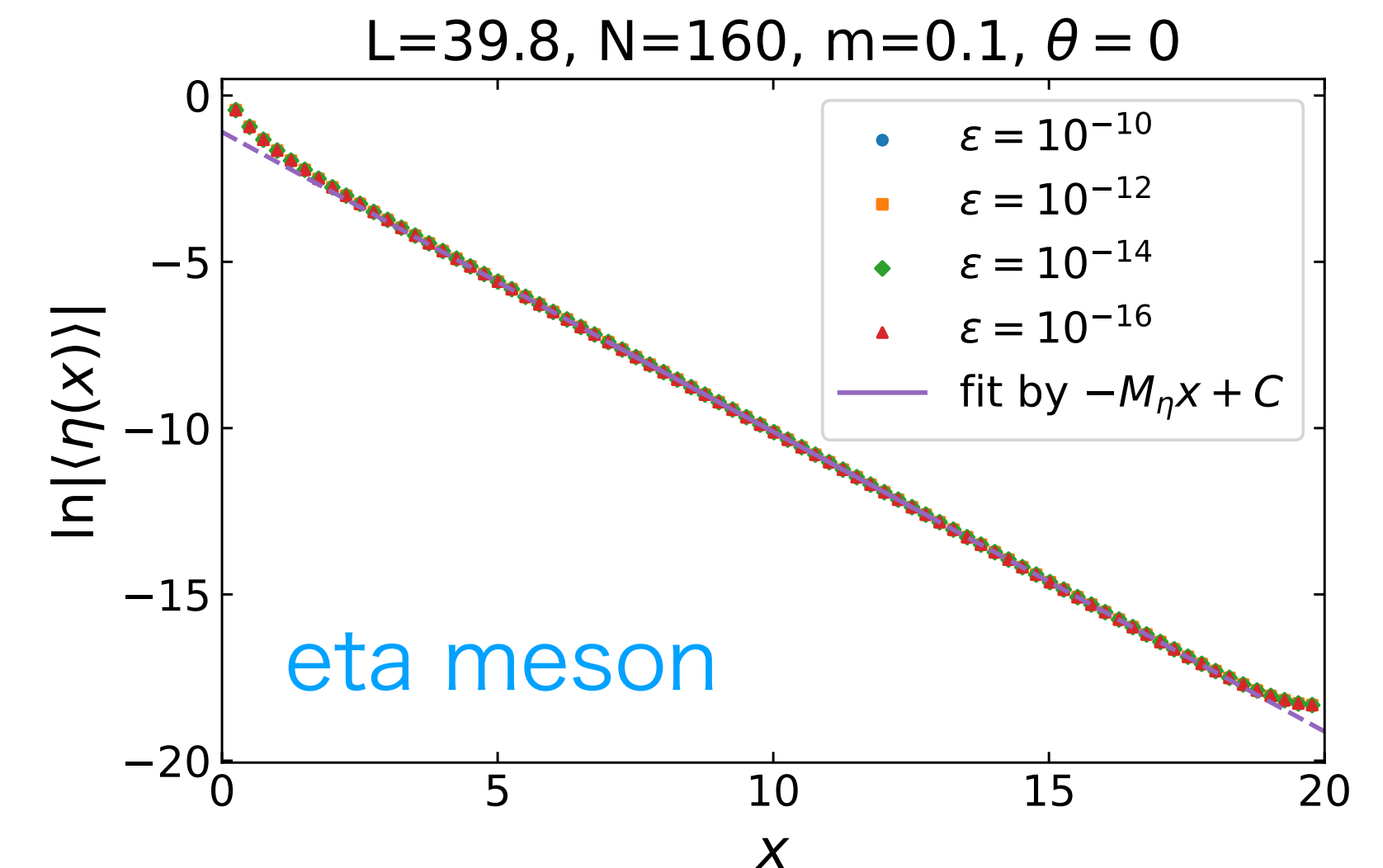
- 1点関数: $\langle \mathcal{O}(x) \rangle \sim \exp(-Mx)$



- ε 依存性は見られない
→ 特異値の切り捨てによる
系統誤差は十分小さい

fittingの結果

- eta: $M = 0.9014(1)$, $C = -1.096(1)$
- sigma: $M = 0.761(2)$, $C = -2.71(2)$

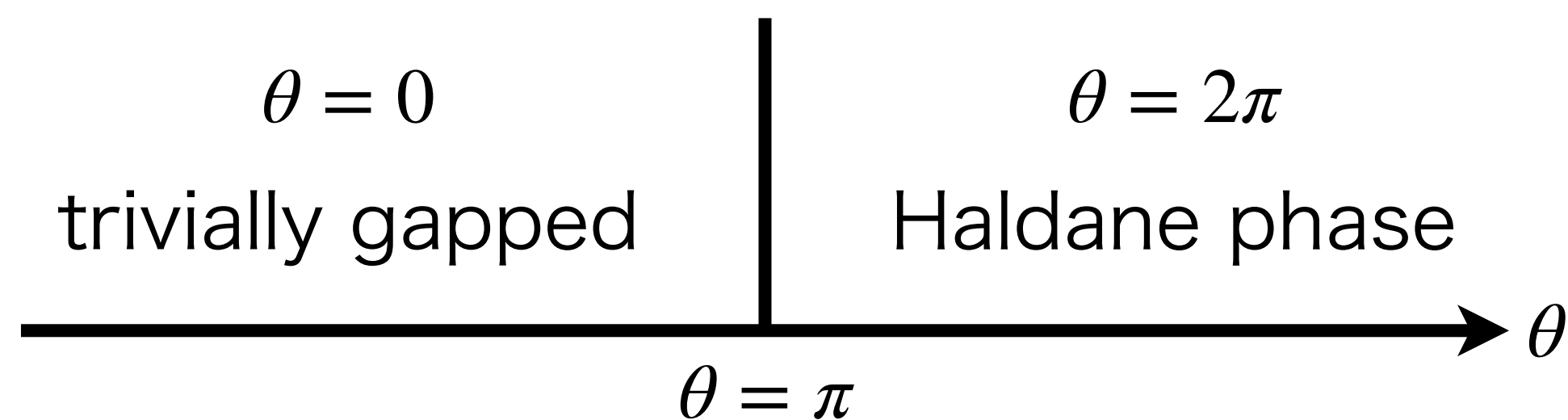
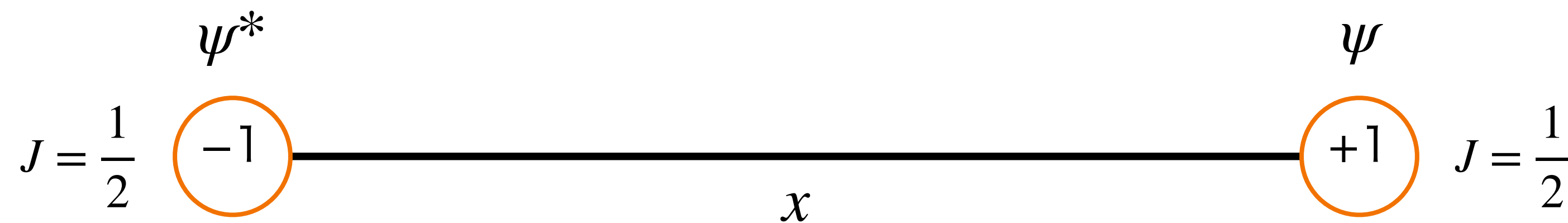


(2) pion: tricky case

⚠ $\theta = 0$ では triplet の一点関数が常にゼロ $\langle \pi(x) \rangle = 0$

解決法： θ の値を $\theta = 2\pi$ にシフトすることで背景電場を導入

- 電荷 ± 1 を持つ Dirac fermion が edge mode として励起される
- boundary 上の isospin $1/2 \rightarrow$ iso-triplet meson の source

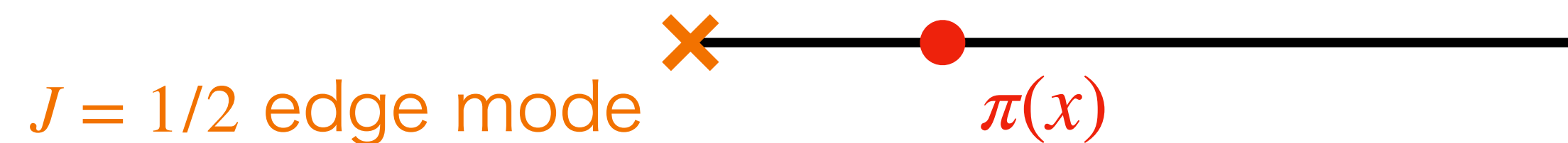


cf.) 反強磁性 Heisenberg chain
と同様の SPT 的性質

[Chen et al. (2011)] [Kapustin (2014)]

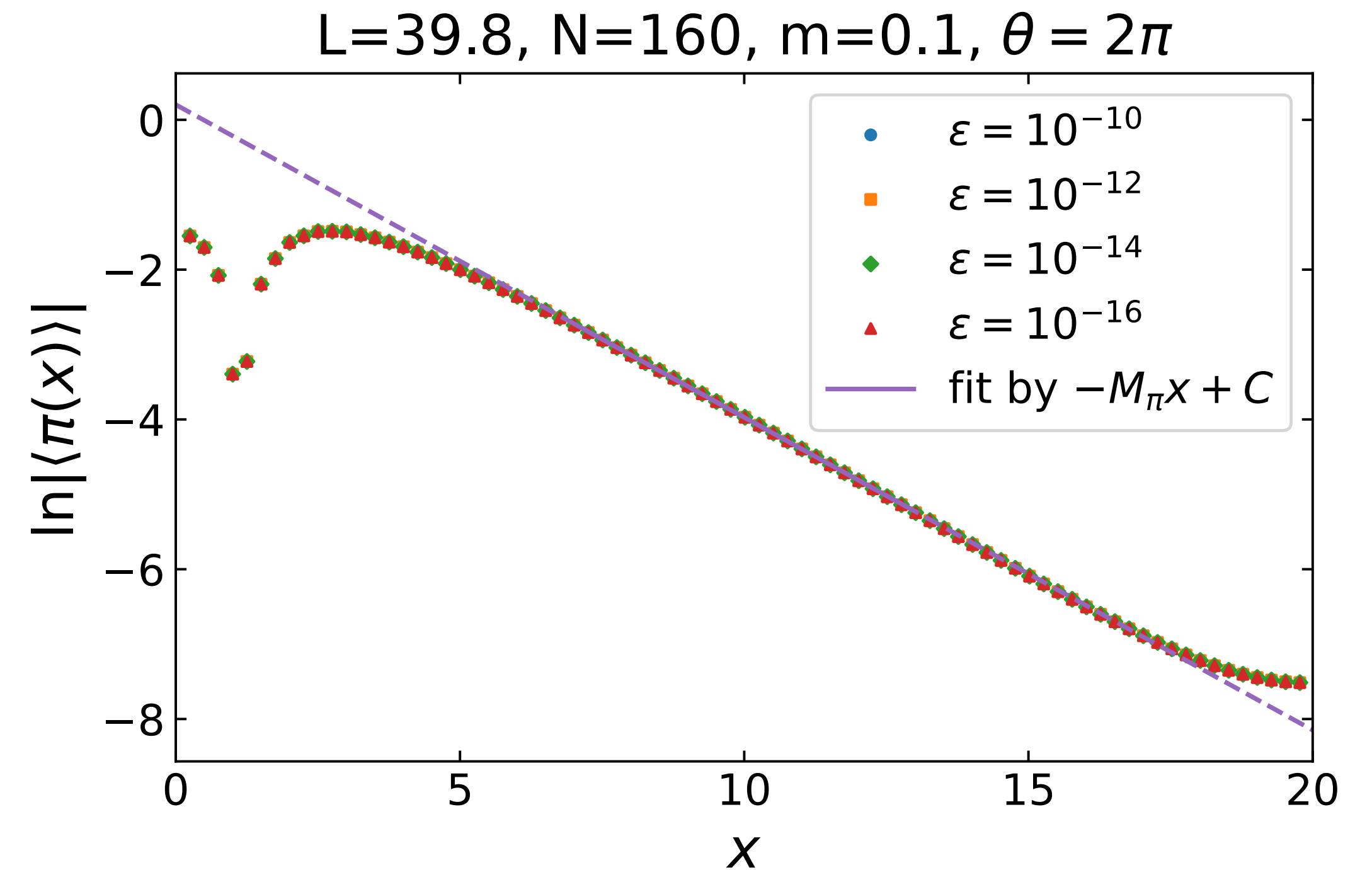
(2) one-point-fn. scheme (pion)

- $\theta = 2\pi$ において基底状態を生成
- 1点関数を計算 $\langle \pi(x) \rangle \sim \exp(-Mx)$



- fittingの結果:
 $M = 0.4175(9)$, $C = 0.203(9)$

- ε 依存性は見られない



	pion	sigma	eta
M	0.4175(9)	0.761(2)	0.9014(1)

数値計算の結果

(1) Correlation-function scheme

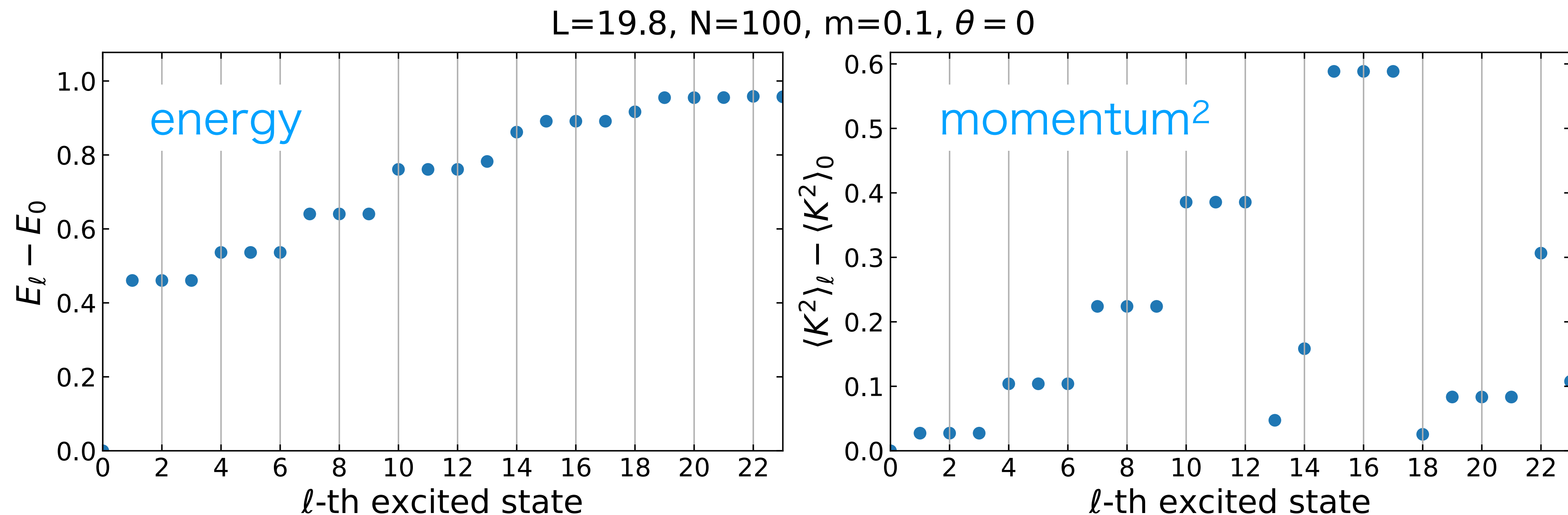
(2) One-point-function scheme

(3) Dispersion-relation scheme

(3) Dispersion-relation scheme

- energy gap: $\Delta E_\ell = E_\ell - E_0$ momentum square: $\Delta K_\ell^2 = \langle K^2 \rangle_\ell - \langle K^2 \rangle_0$
- triplets \rightarrow pion? singlets \rightarrow sigma or eta meson?

量子数を測ることによって状態を分類 : $\mathbf{J}^2, J_z, G = Ce^{i\pi J_y}$



量子数

• triplets: $\mathbf{J}^2 = 2$, $J_z = (0, \pm 1)$, $G > 0$

→ pion ($J^{PG} = 1^{-+}$)

• singlets: $\mathbf{J}^2 = 0$, $J_z = 0$,

$G > 0$ ($\ell = 13, 14, 22$) → sigma meson ($J^{PG} = 0^{++}$)

$G < 0$ ($\ell = 18, 23$) → eta meson ($J^{PG} = 0^{--}$)

triplets

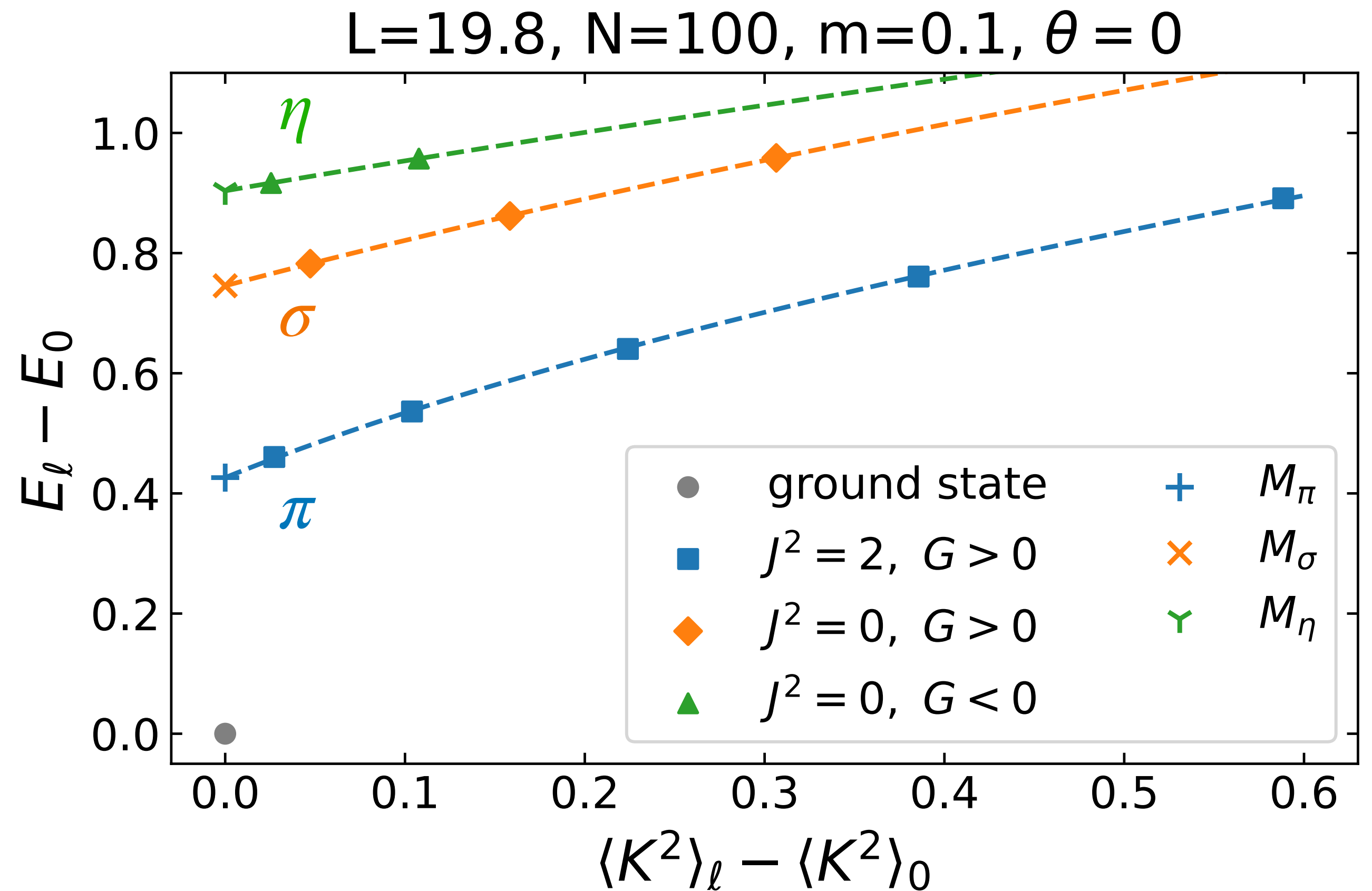
ℓ	\mathbf{J}^2	J_z	G
1	2.00000004	0.99999997	0.27872443
2	2.00000012	-0.00000000	0.27872416
3	2.00000004	-0.99999996	0.27872443
4	2.00000007	0.99999999	0.27736066
5	2.00000006	0.00000000	0.27736104
6	2.00000009	-0.99999998	0.27736066
7	2.00000010	1.00000000	0.27536687
8	2.00000002	0.00000000	0.27536702
9	2.00000007	-0.99999998	0.27536687
10	2.00000007	0.99999998	0.27356274
11	2.00000005	0.00000001	0.27356277
12	2.00000007	-0.99999999	0.27356274
15	1.99999942	0.99999966	0.27173470
16	2.00000052	0.00000000	0.27173482
17	2.00000015	-1.00000003	0.27173470
19	2.00009067	1.00004377	0.27717104
20	2.00002578	-0.00000004	0.27717020
21	2.00003465	-1.00001622	0.27717104

singlets

ℓ	\mathbf{J}^2	J_z	G
0	0.00000003	-0.00000000	0.27984227
13	0.00000003	0.00000000	0.27865844
14	0.00000003	0.00000000	0.27508176
18	0.00000028	0.00000006	-0.27390909
22	0.00001537	0.00000115	0.26678987
23	0.00003607	-0.00000482	-0.27664779

分散関係の結果

- 各メソン毎に ΔE_ℓ を ΔK_ℓ^2 に対してプロット
- 分散関係式 $\Delta E = \sqrt{b^2 \Delta K^2 + M^2}$ でfittingする

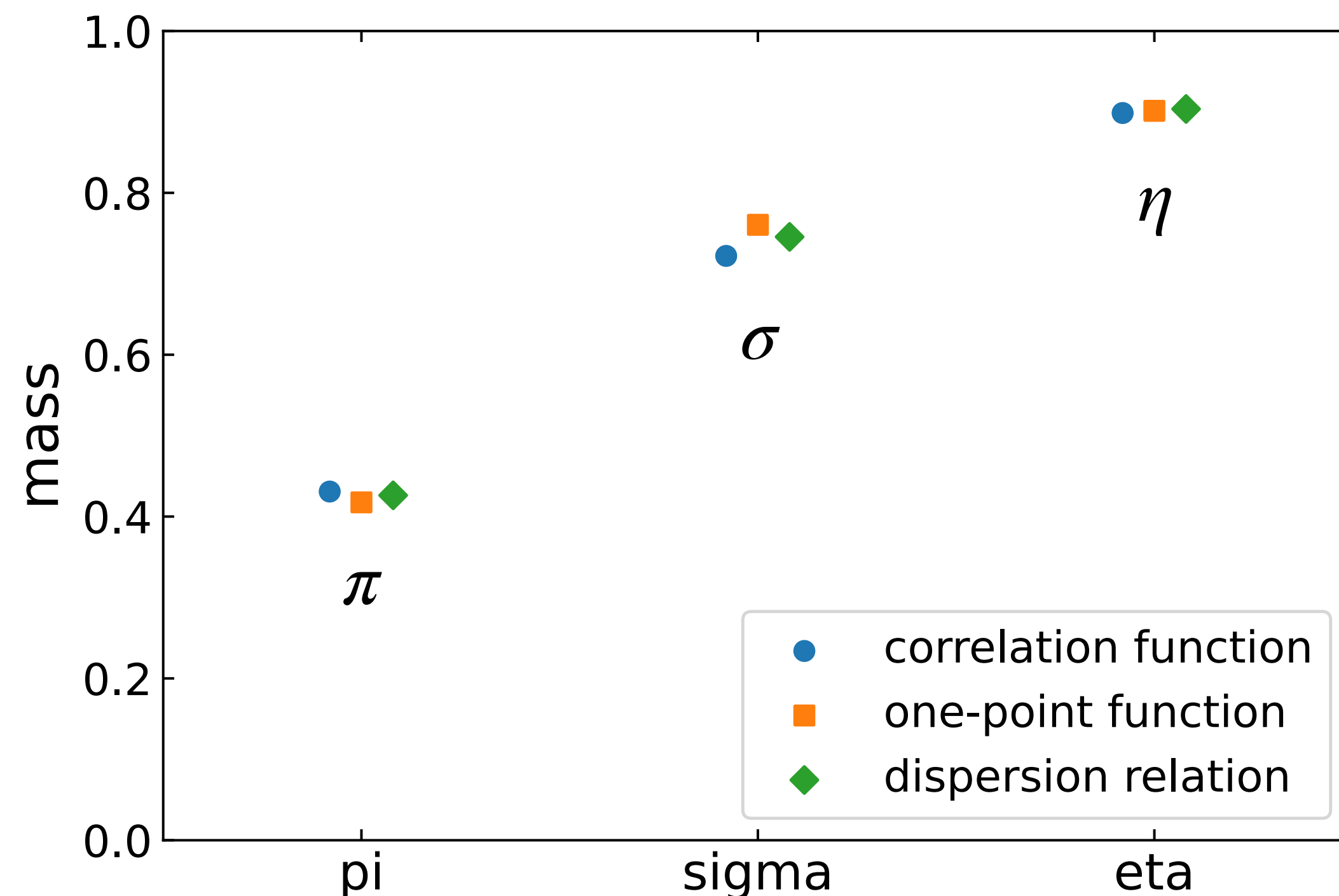


	pion	sigma	eta
M	0.426(2)	0.7456(5)	0.9037
b	1.017(4)	1.087(2)	0.9622

Summary

- 3つの独立な方法により得られたスペクトルは互いに無矛盾
- bosonizationを用いた近似計算とも無矛盾
 - ✓ $M_\pi < M_\sigma < M_\eta \rightarrow$ U(1) problem
 - ✓ $M_\eta \sim \mu$ ($\mu = g\sqrt{2/\pi} \sim 0.8$)
 - ✓ $M_\sigma/M_\pi = \sqrt{3}$ within 5% deviation

[Coleman (1976)] [Dashen et al. (1975)]



	correlation func.	one-point func.	dispersion
M_σ/M_π	1.68(2)	1.821(6)	1.75(1)

Discussion

(1) correlation-function scheme

👍 あらゆる場合に適用可能な一般的な手法

😞 DMRGではbond次元の影響が大きい → 😊 量子計算

(2) one-point-function scheme

👍 系のサイズやbond次元が小さくても有効

😞 boundaryと同じ量子数を持つ lowest state にしか適用できない

(3) dispersion-relation scheme

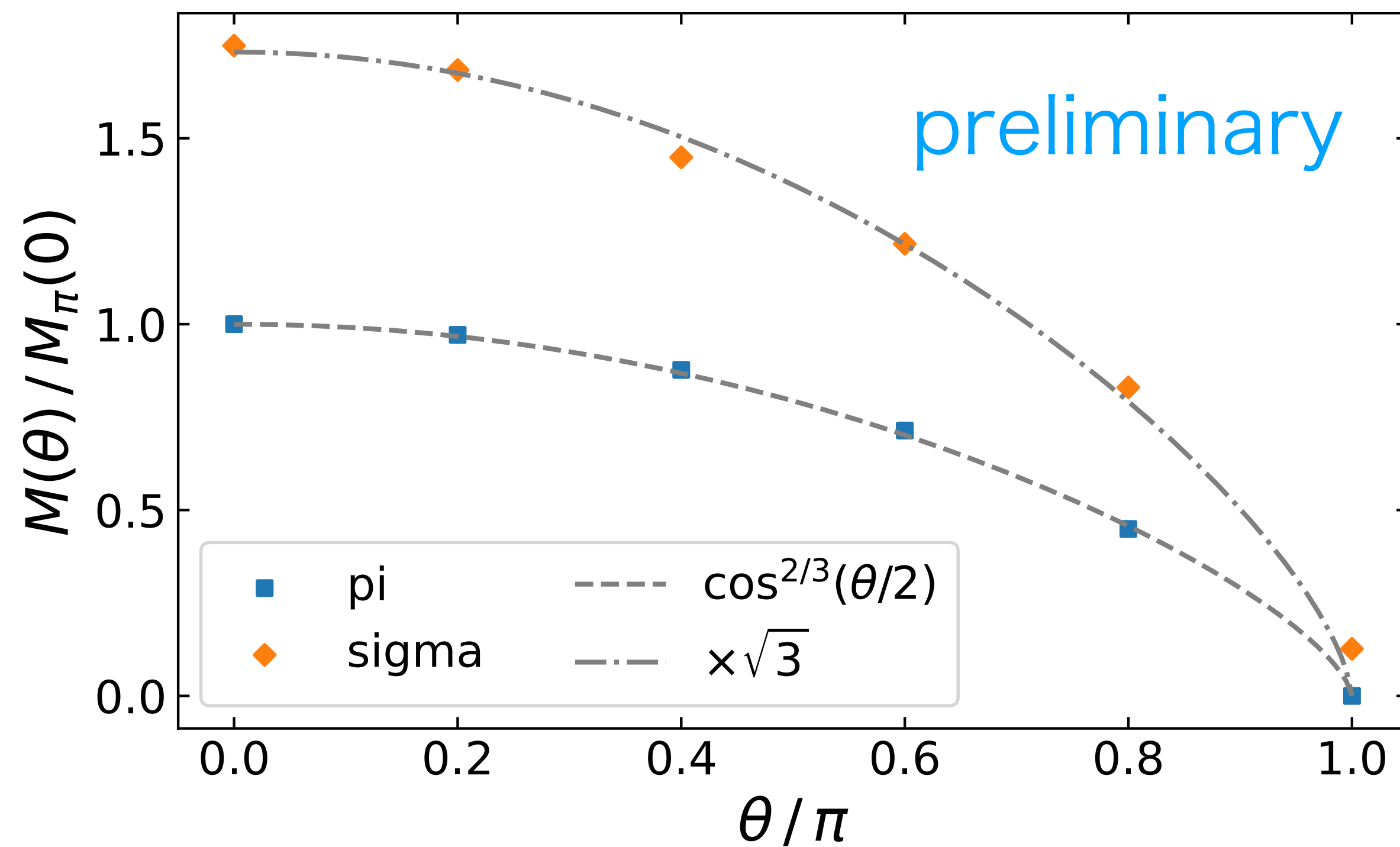
👍 様々な励起状態が発見的に得られる / 波動関数などの情報 (s/p-wave)

😞 励起状態をたくさん生成する計算コストが高い

Application to $\theta \neq 0$

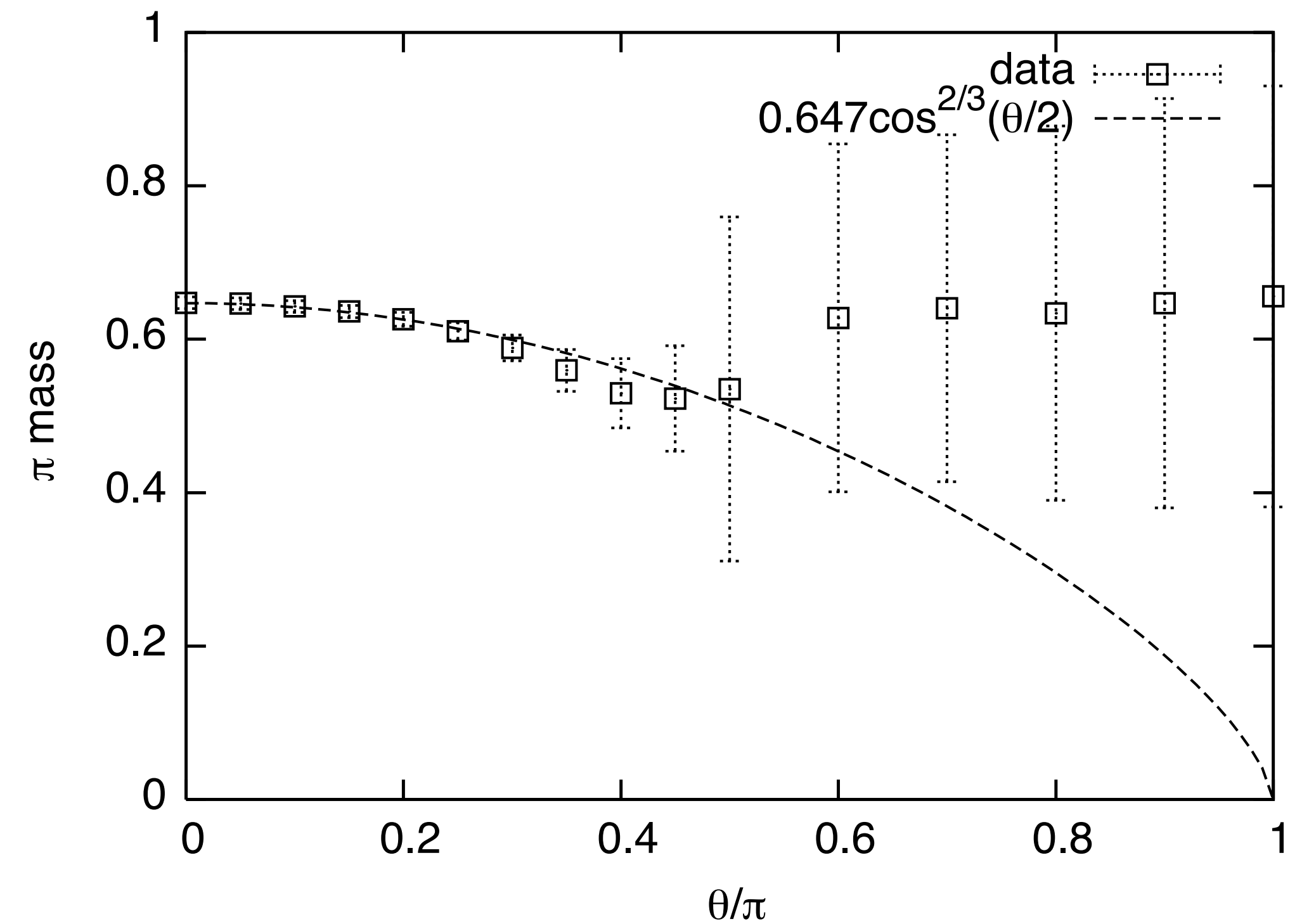
- これらの手法は $\theta \neq 0$ の場合にも適用可能
- (3) dispersion-relation scheme の結果

L=19.8, N=100, m=0.1



Monte Carlo result

[Fukaya & Onogi (2003)]



Section 2

TRGで見るラーゼンゲージ理論

collaboration with

平沢 光昭 (INFN Milano-Bicocca), 西村 淳 (KEK, SOKENDAI),
and Atis Yosprakob (Niigata U)

JHEP12 (2021) 011 [arXiv:2110.05800](https://arxiv.org/abs/2110.05800)

テンソル繰り込み群(TRG)

[Levin & Nave (2007)]

- テンソルネットワークで表現された分配関数を粗視化しながら計算

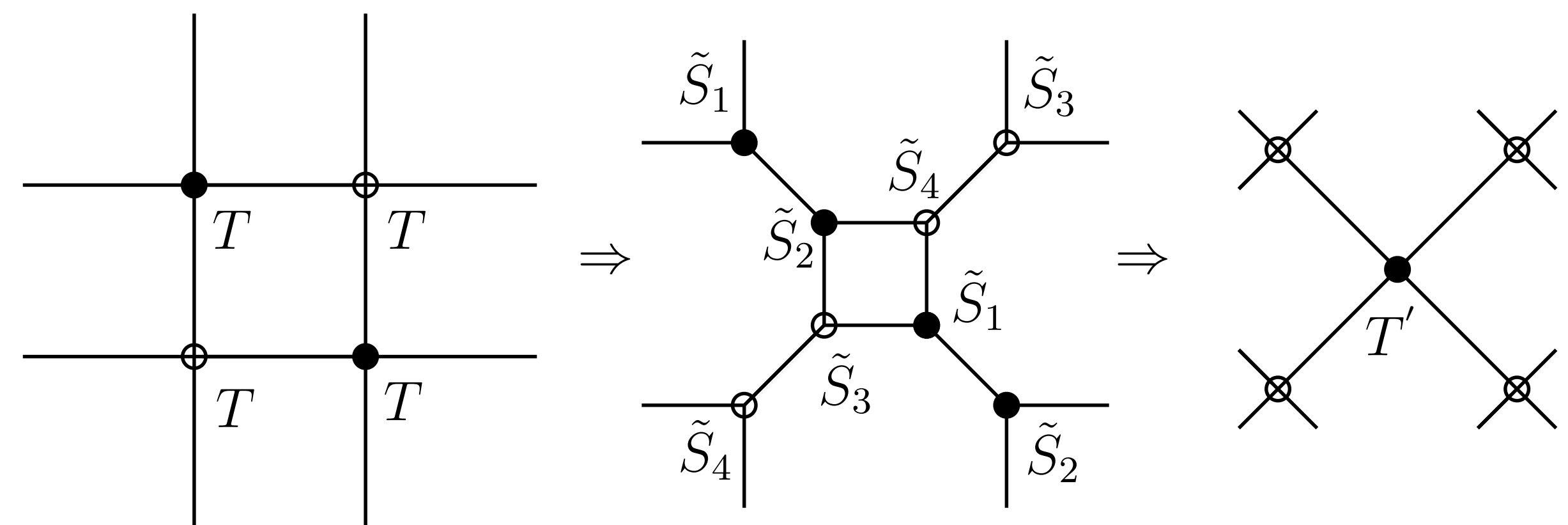
$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} = \sum_{a,b,c,d,\dots} T_{abcd} T_{defg} \dots$$

- deterministicな計算で符号問題がない
→ 統計誤差はなく系統誤差のみ

- 大体積での計算が容易：計算コスト $\sim \log V$

- fermionを直接扱うことが可能：Grassmann TRG

[Gu et al. (2010)] [Shimizu & Kuramashi (2014)] [Akiyama & Kadoh (2021)]



U(N)・SU(N)ゲージ理論のTRG

- 2次元(Euclidean)のU(1)・SU(2)ゲージ理論への適用は比較的容易
- 高次元($d \geq 3$)や高ランク($N \geq 3$)への拡張は非自明
- 本研究は高ランクの場合に注目した
- ゲージ場はbosonicであり、大きな内部自由度を持つ
→ 有限のテンソルを得るために、自由度を離散化し、cutoffを導入
- character展開を用いて群積分を離散和に置き換えるを採用 [Bazavov et al. (2015)]
[Unmuth-Yockey et al. (2018)]

cf.) 他にGauss-Legendre quadratureや群積分のサンプリングによる近似など
[Kuramashi & Yoshimura (2020)] [Fukuma et al. (2021)] [Kuwahara & Tsuchiya (2019)]

θ項を含む2次元ゲージ理論

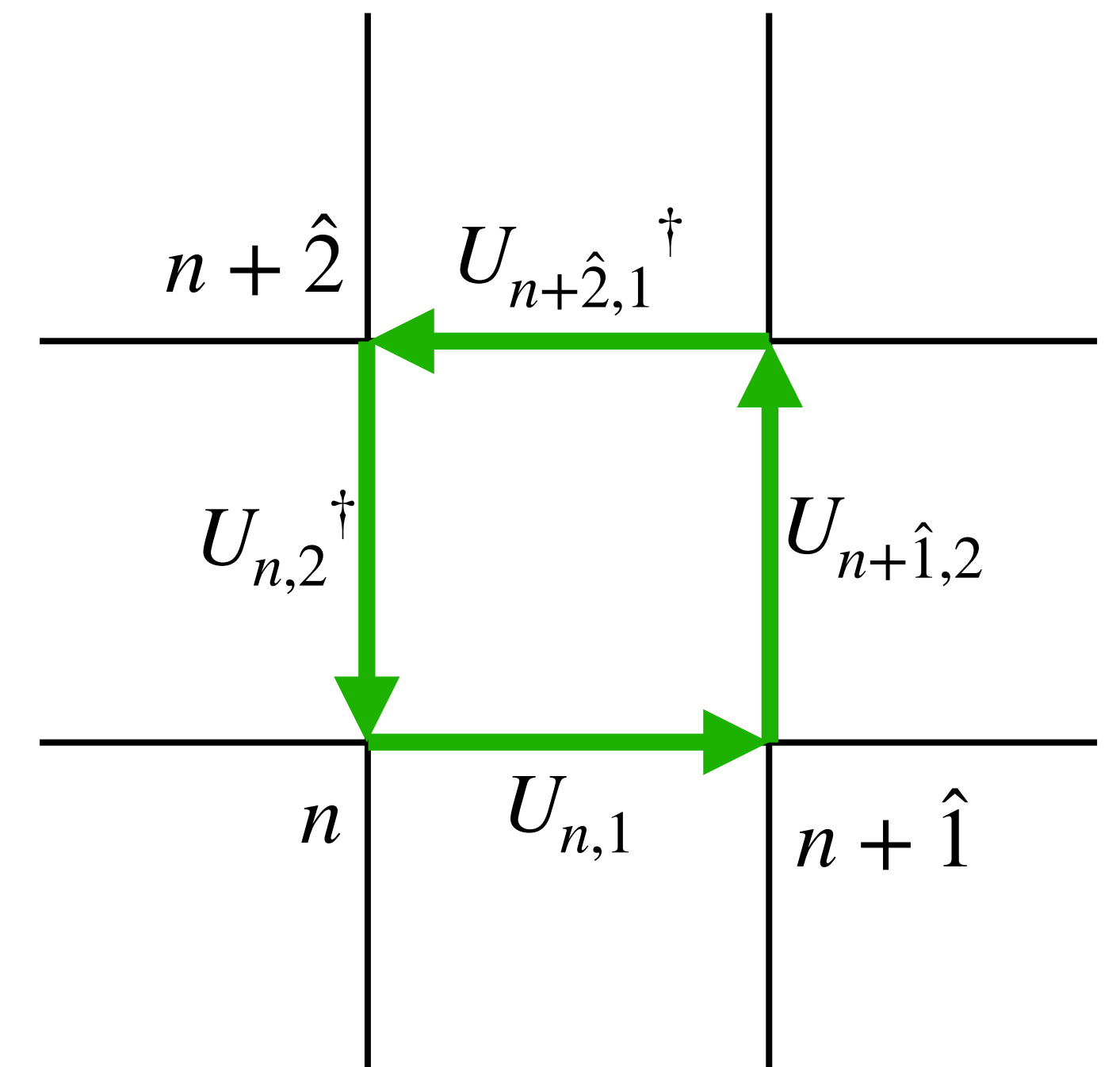
- 作用: $S = \frac{1}{4g^2} \int d^2x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu})^2 - i\theta Q$

- トポロジカルチャージ: $Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr}(F_{\mu\nu})$ (U(N)の場合)

- 格子正則化 $\rightarrow S = -\frac{N}{\lambda} \sum_{n \in \Lambda} \operatorname{tr}(P_n + P_n^\dagger) - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{n \in \Lambda} \log \det P_n \quad \lambda = 2Ng^2 a^2$

link変数: $U_{n,\mu} \in \text{U}(N), \text{SU}(N)$ plaquette: $P_n = U_{n,1} U_{n+\hat{1},2} U_{n+\hat{2},1}^\dagger U_{n,2}^\dagger$

- 有限格子上での厳密解が知られている [Rusakov (1990)] [Bonati & Rossi (2019)]



SU(N), U(N) の既約表現

- SU(N)の表現は条件 $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{N-1} \geq 0$ を満たすN-1個の整数でラベルできる

$$r^{(\text{SU})} = \{l_1, l_2, \dots, l_{N-1}\} \quad \text{cf.) Young図} \rightarrow i \text{ 行目に } l_i \text{ 個の } \square$$

- U(N)の表現は、SU(N)の表現とcharge $q \in \mathbb{Z}$ の組として得られる

$$r^{(\text{U})} = (r^{(\text{SU})}, q) = \{l_1 + q, l_2 + q, \dots, l_{N-1} + q, q\}$$

- 表現の次元：
$$d_r = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \left(1 + \frac{l_i - l_j}{j - i} \right)$$

Character展開

• 分配関数 : $Z = \int \mathcal{D}U e^{-S} = \int \mathcal{D}U \prod_{n \in \Lambda} w(P_n)$ Haar measure : $\mathcal{D}U = \prod_{n, \mu} dU_{n, \mu}$

• local Boltzmann weight の character展開

cf.) U(1)の場合 = Fourier展開

$$w(P) = \exp \operatorname{tr} \left(\frac{N}{\lambda} (P + P^\dagger) + \frac{\theta}{2\pi} \log P \right) = \sum_r \gamma_r \operatorname{tr}_r(P) \qquad w(P) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \gamma_q e^{iq\phi}$$

• 展開係数 : $\gamma_r = \det M_r$ $[M_r]_{ij} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \cos \left\{ \left(l_j + i - j + \frac{\theta}{2\pi} \right) \phi \right\} \exp \left(\frac{2N}{\lambda} \cos \phi \right)$

[Drouffe & Zuber (1983)] [Bonati & Rossi (2019)]

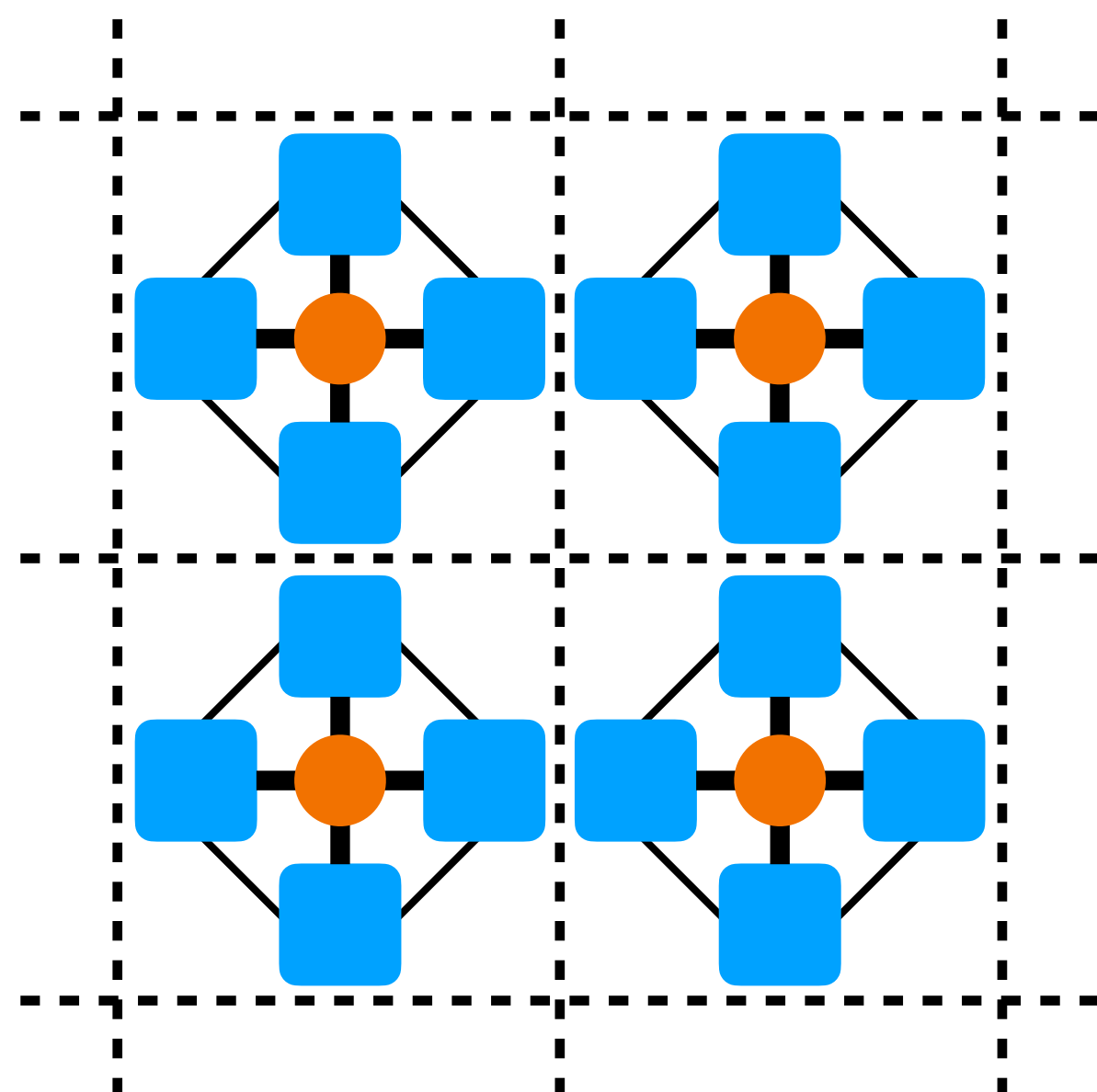
テンソルの構成

各表現ごとに $\text{tr}_r(P_n) = \sum_{i,j,k,l} D_{ij}^r(U_{n,1}) D_{jk}^r(U_{n+\hat{1},2}) D_{kl}^r(U_{n+\hat{2},1}^\dagger) D_{li}^r(U_{n,2}^\dagger)$
 $D^r(U)$: U の表現行列

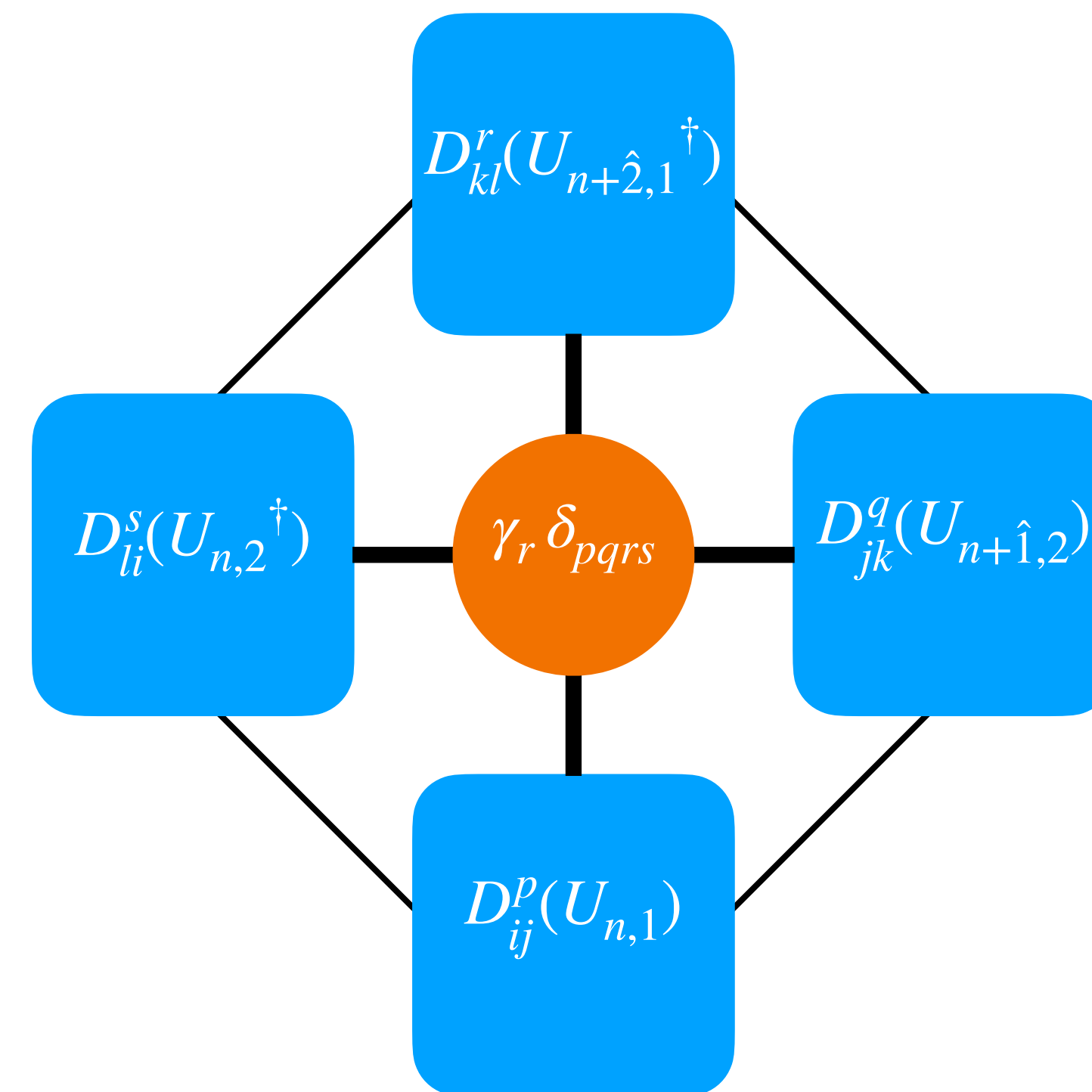
$\rightarrow w(P_n) = \sum_{p,q,r,s} \sum_{i,j,k,l} \gamma_r \delta_{pqrs} D_{ij}^p(U_{n,1}) D_{jk}^q(U_{n+\hat{1},2}) D_{kl}^r(U_{n+\hat{2},1}^\dagger) D_{li}^s(U_{n,2}^\dagger)$

分配関数

$$Z = \int \mathcal{D}U$$



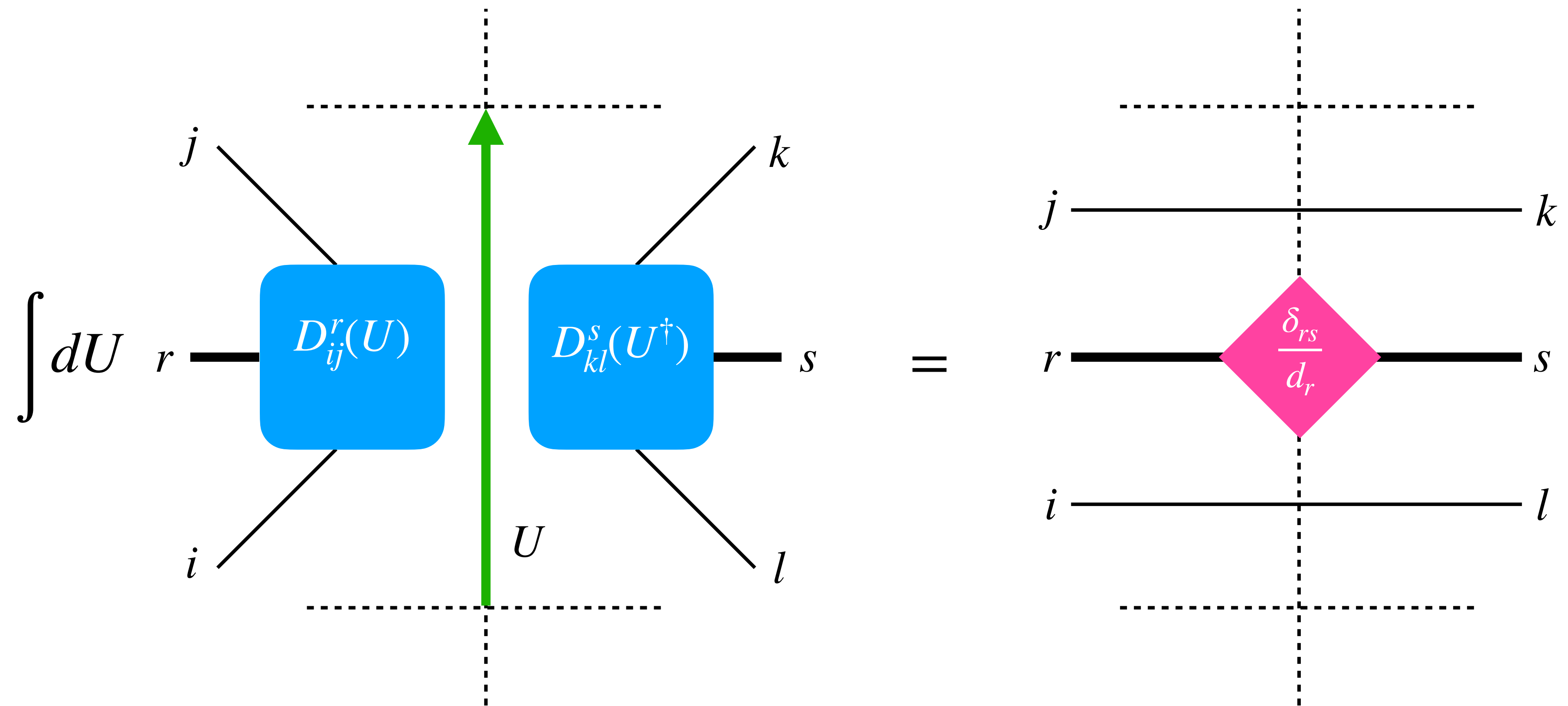
$$w(P_n) =$$



テンソルの構成

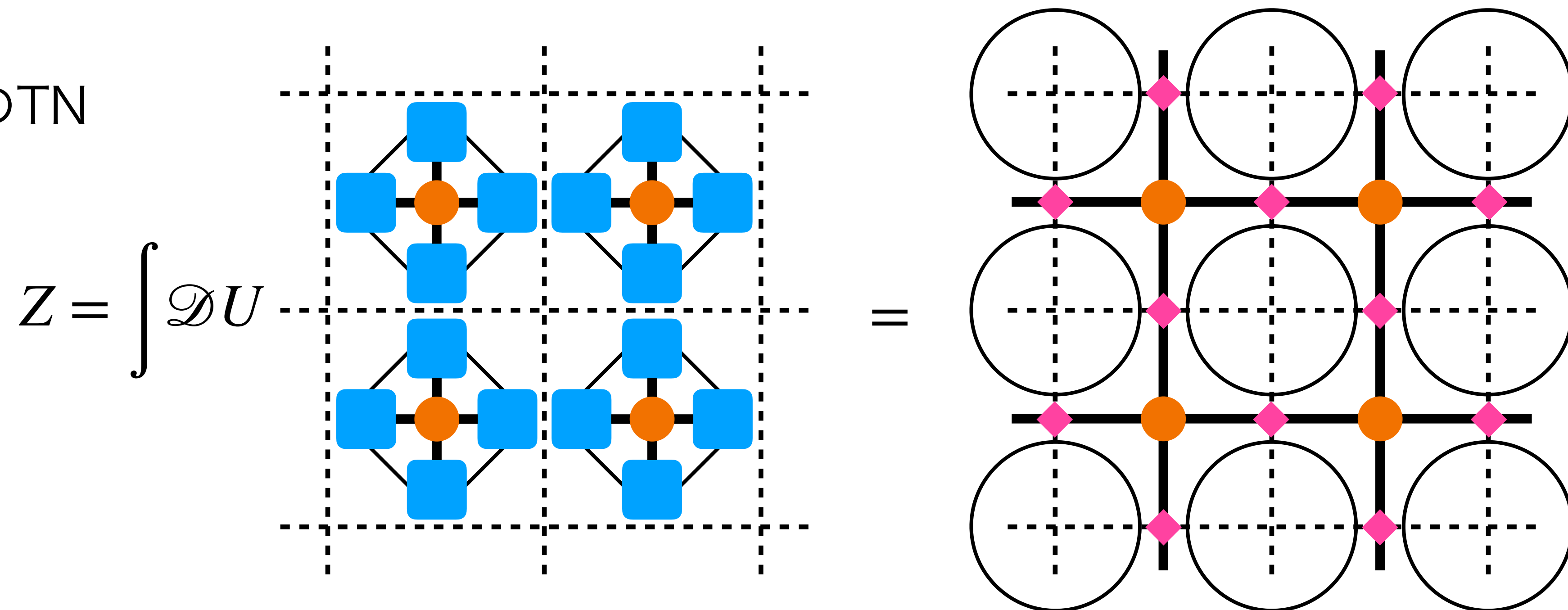
• 表現行列の直交性：
$$\int dU D_{ij}^r(U) D_{kl}^s(U^\dagger) = \frac{1}{d_r} \delta_{rs} \delta_{il} \delta_{jk}$$

• U の積分：



テンソルの構成

- 分配関数のTN



- 基本テンソル

$$T_{pqrs} = \text{Diagram} = \frac{\gamma_r}{d_r} \delta_{pqrs}$$

The diagram shows a central orange circle connected to four pink diamonds, representing the basic tensor T_{pqrs} .

$$\text{Circle} = \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{kl} \delta_{li} = d_r$$

The diagram shows a circle with four pink diamonds at its corners, representing the trace of the identity tensor, which equals the dimension d_r .

行列添字はtrace out可能 [Yosprakob (2023)]

TRGが厳密解を与える特殊な例

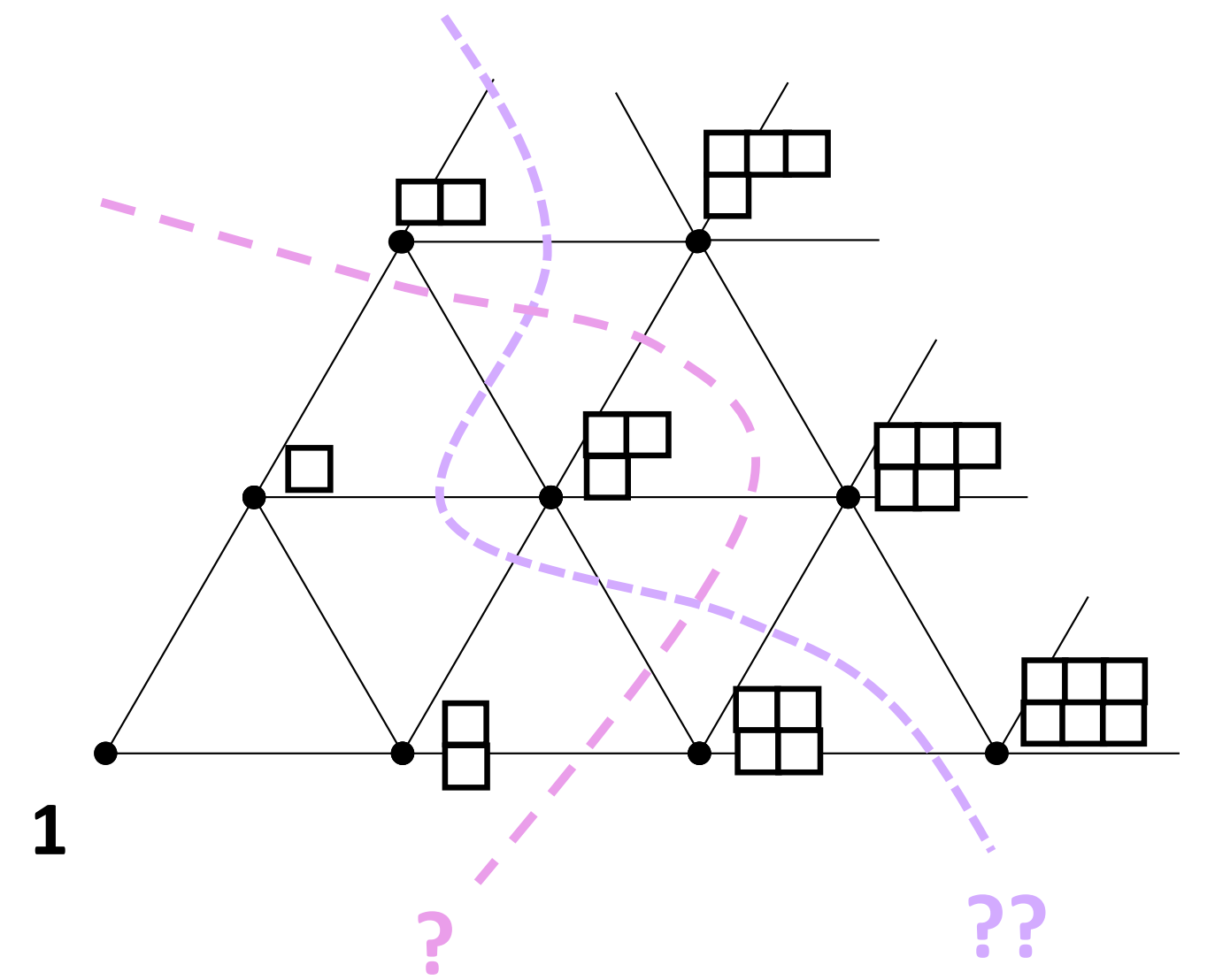
- 2次元ゲージ理論の基本テンソル： $T_{pqrs} = \frac{\gamma_r}{d_r} \delta_{pqrs}$ p, q, r, s は表現のラベル
- 表現の数を D_{cut} 個に cutoff し、有限のテンソルを得る
- テンソルは“対角成分”のみ値を持つ → 特異値分解が自明 特異値： $\sigma_r = |\gamma_r|/d_r$
- TRGのone step： $T_{pqrs} = \frac{\gamma_r}{d_r} \delta_{pqrs} \rightarrow \left(\frac{\gamma_r}{d_r}\right)^2 \delta_{pqrs}$ bond次元は増加しない
- 分配関数 $Z = \sum_r \left(\frac{\gamma_r}{d_r}\right)^V$ は $D_{\text{cut}} \rightarrow \infty$ で厳密解に一致する

特異値が大きい表現の選び方

- 特異値 $\sigma_r = |\gamma_r|/d_r$ が大きい順に D_{cut} 個の表現を選ぶ
- 全ての表現の中から特異値の大きい表現をどのように探すか？

⚠ 特異値は計算するまでわからない

- U(1)の場合は charge q に、
SU(2)の場合は spin J に上限を課せば良い
- $N \geq 3$ の場合、
どのような条件で表現を選べば良いか？



全ての表現 (無限個)

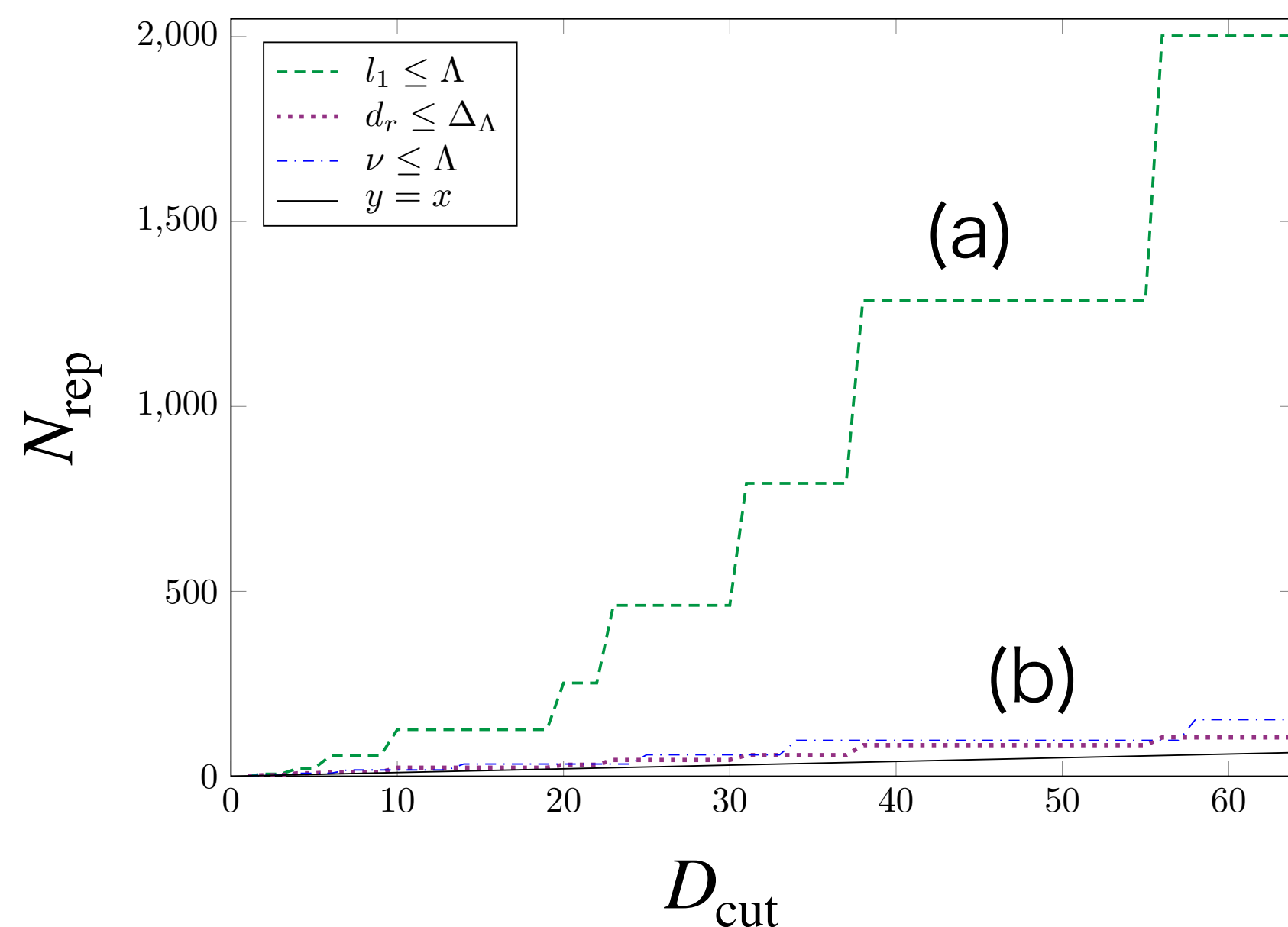
ある条件で
選んだ表現
(N_{rep} 個)

特異値が大きい
順に選んだ表現
(D_{cut} 個)

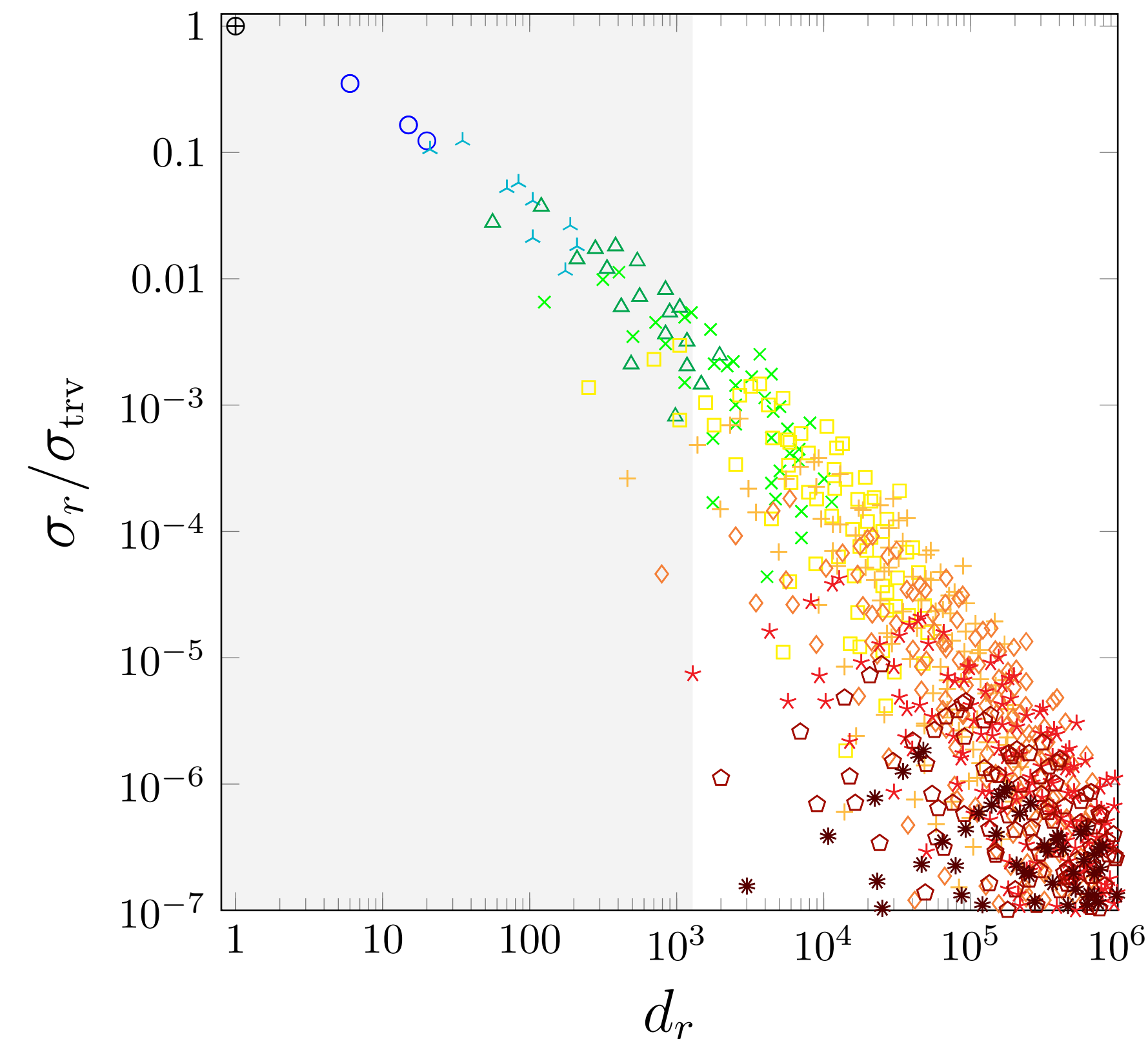
表現のcutoff

- (a) 表現をラベルする $\{l_1, l_2, \dots, l_N\}$ に上限を課す $\Lambda_l \geq l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_N$
- (b) 表現の次元に上限を課す $d_r \leq \Lambda_d$

→ (b)の方が効率が良い (以下の解析では(b)を用いる)

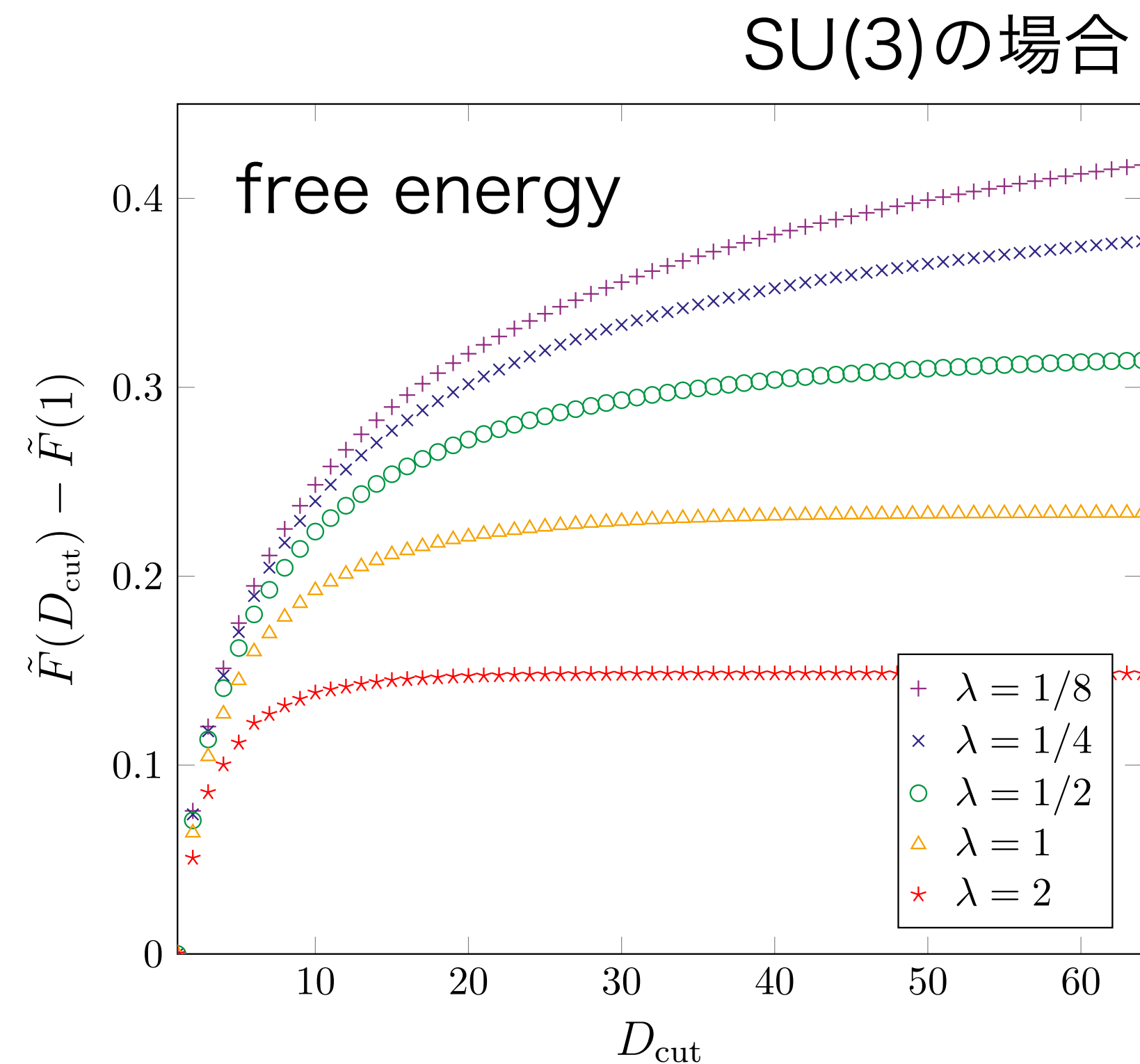
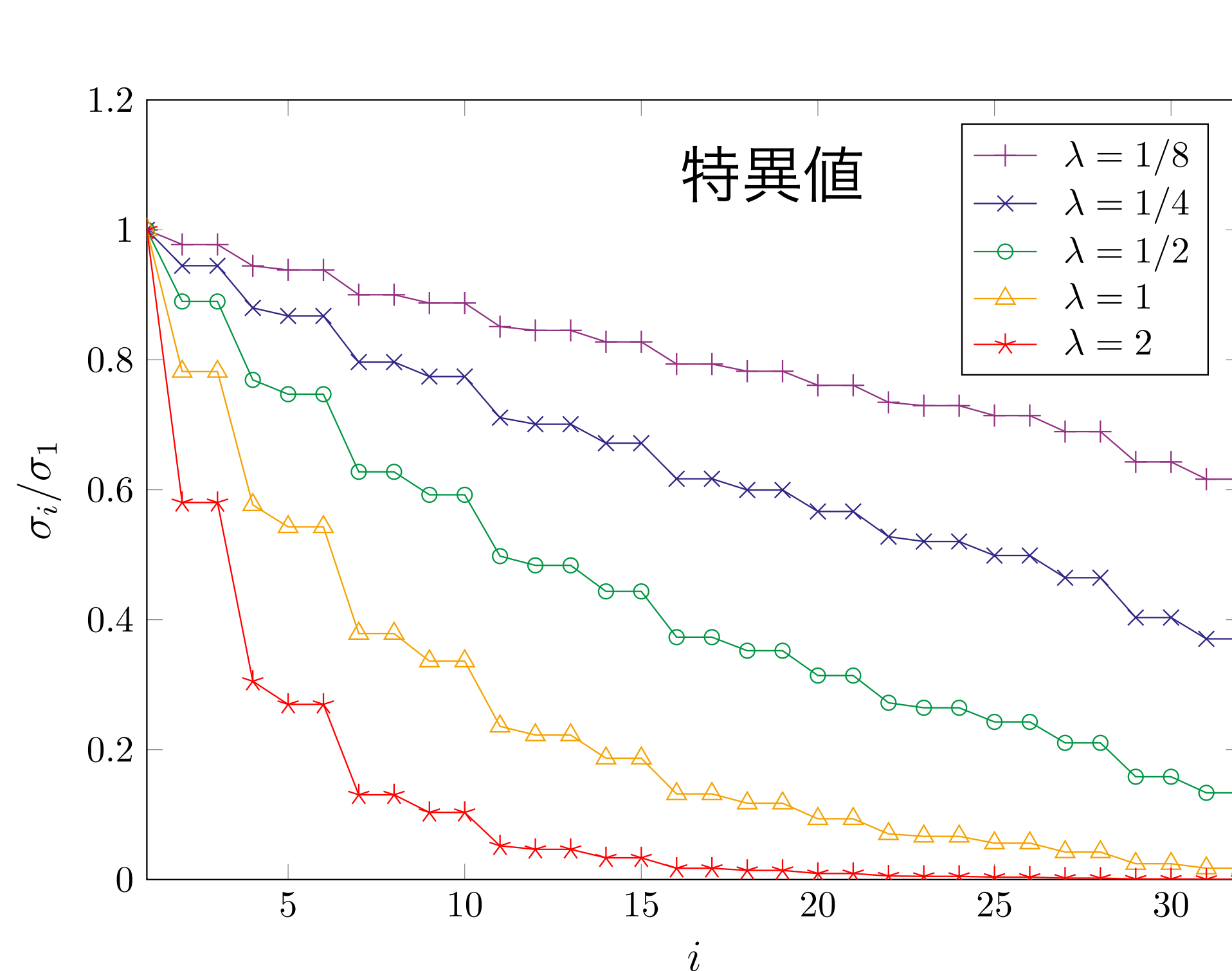


次元が大きいほど
特異値は小さい傾向



特異値のスペクトル

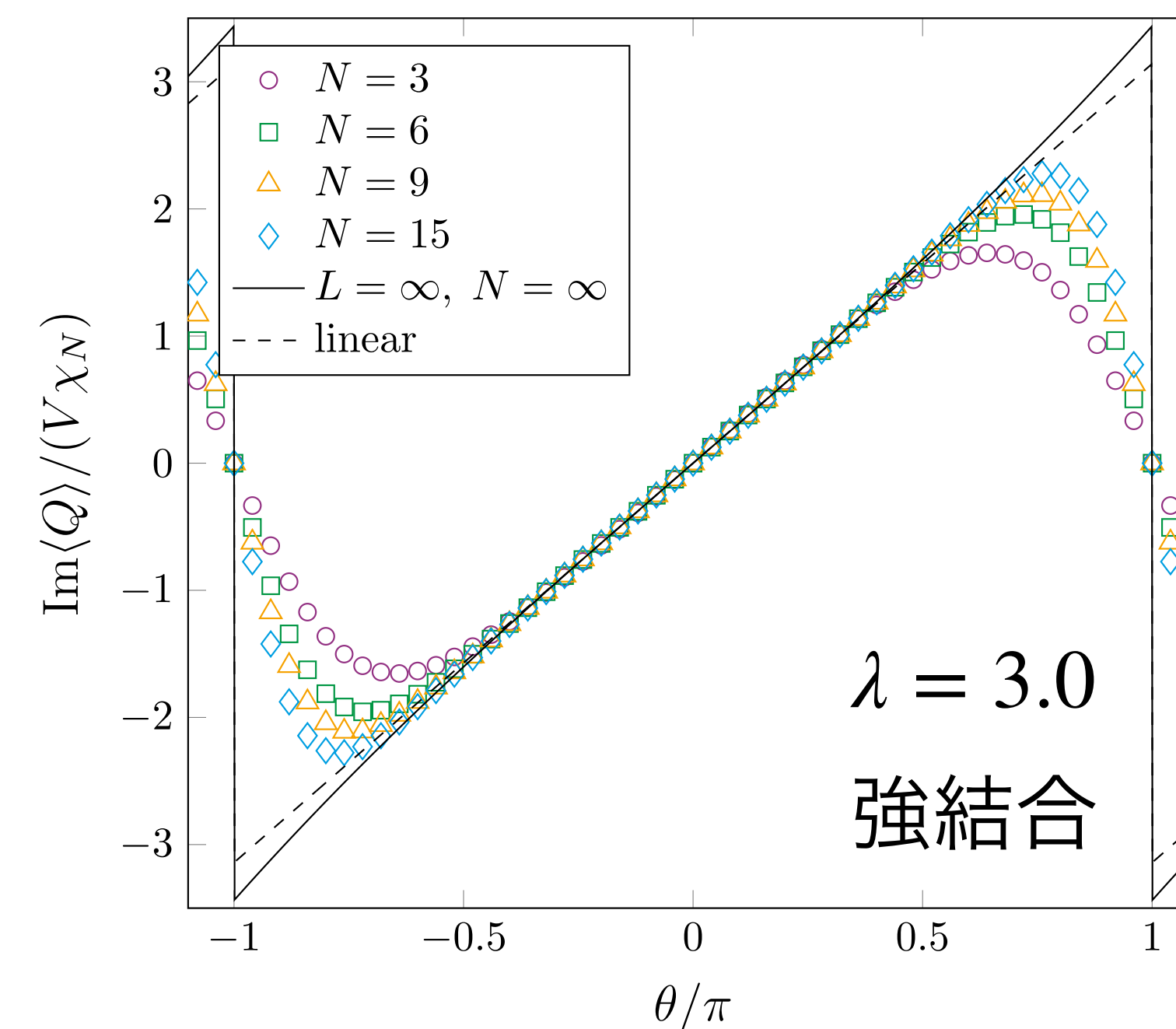
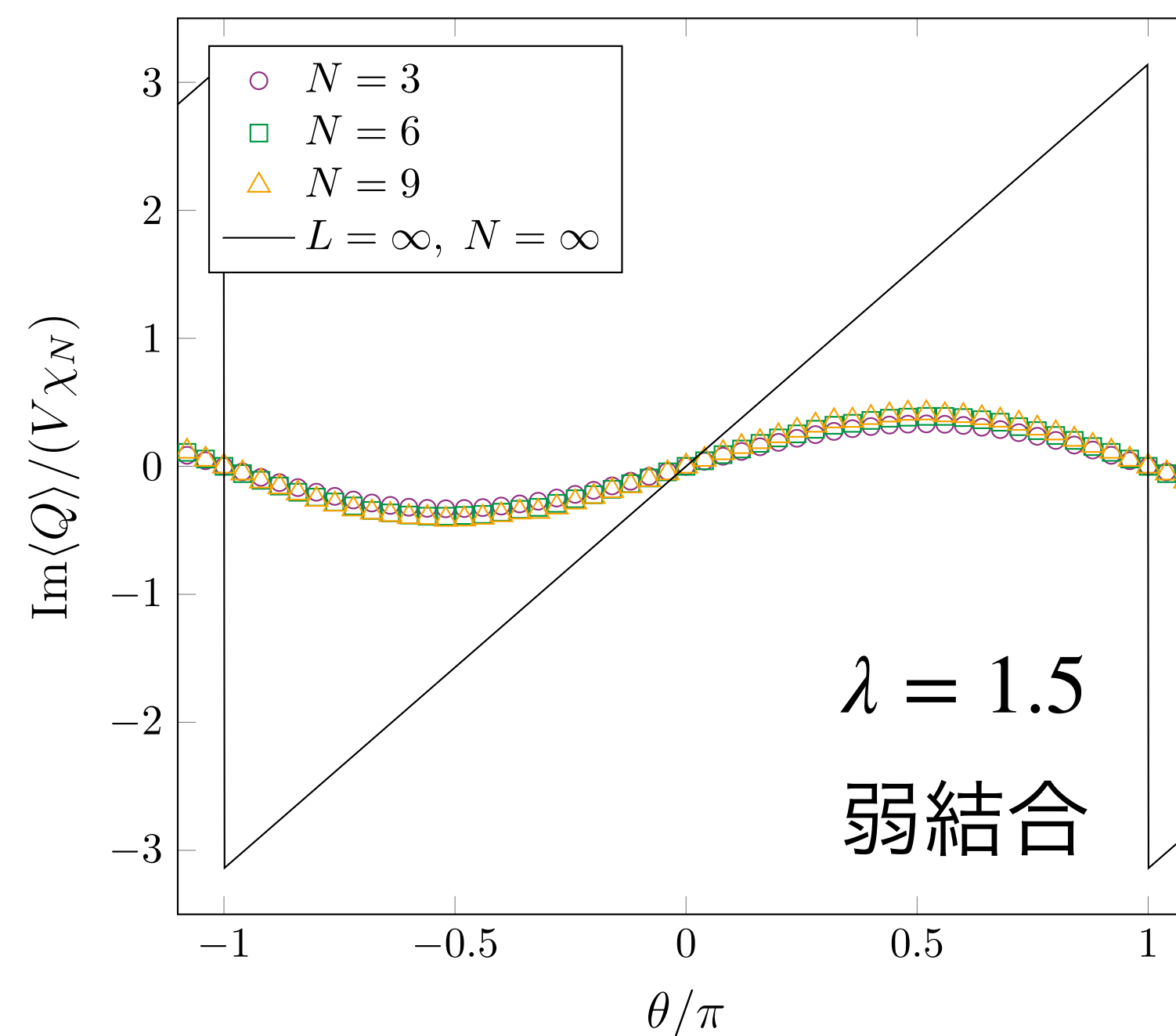
- coupling $\lambda = 2Ng^2a^2$ が大きいほど、特異値のスペクトルは速く減衰
- 弱結合では D_{cut} を大きくする必要がある



large-Nにおける物理量の θ 依存性

- 小体積 $V = 2 \times 2$ でNを変えながら物理量の θ 依存性を計算
- Gross-Witten-Wadia相転移 $\lambda = 2$ を境に振る舞いが異なる
- 強結合領域 $\lambda > 2$ では $\theta \neq 0$ でも large-N reduction が成り立つ

- Nを増やすと、
有限体積の結果が
無限体積の結果に近づく



large-N における特異値の振る舞い

$$\sigma_{(r^{(\text{SU})}, q_0)}(\theta) = \sigma_{(r^{(\text{SU})}, q_0)}(0) e^{-\chi f(\theta) + O(1/N)} \quad q_0 : (r^{(\text{SU})}, q) \text{ の中で最大の特異値を与えるチャージ}$$

$$\sigma_{(r^{(\text{SU})}, q_0+q)}(\theta) = \sigma_{(r^{(\text{SU})}, q_0)}(\theta + 2\pi q) = \sigma_{(r^{(\text{SU})}, q_0)}(0) e^{-\chi f(\theta+2\pi q) + O(1/N)} \quad \text{shift of } q = \text{shift of } \theta$$

- 強結合では $q \neq 0$ のとき

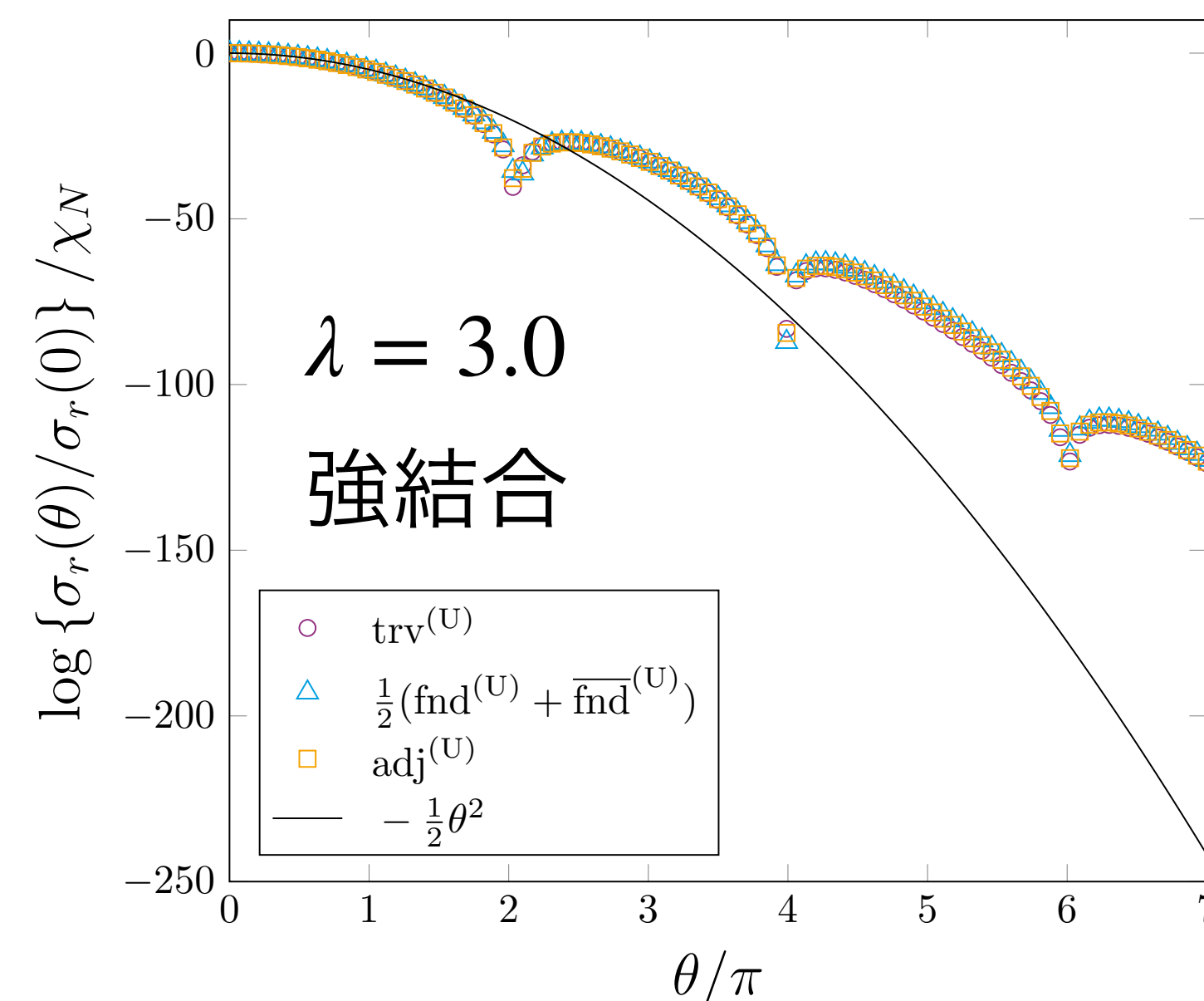
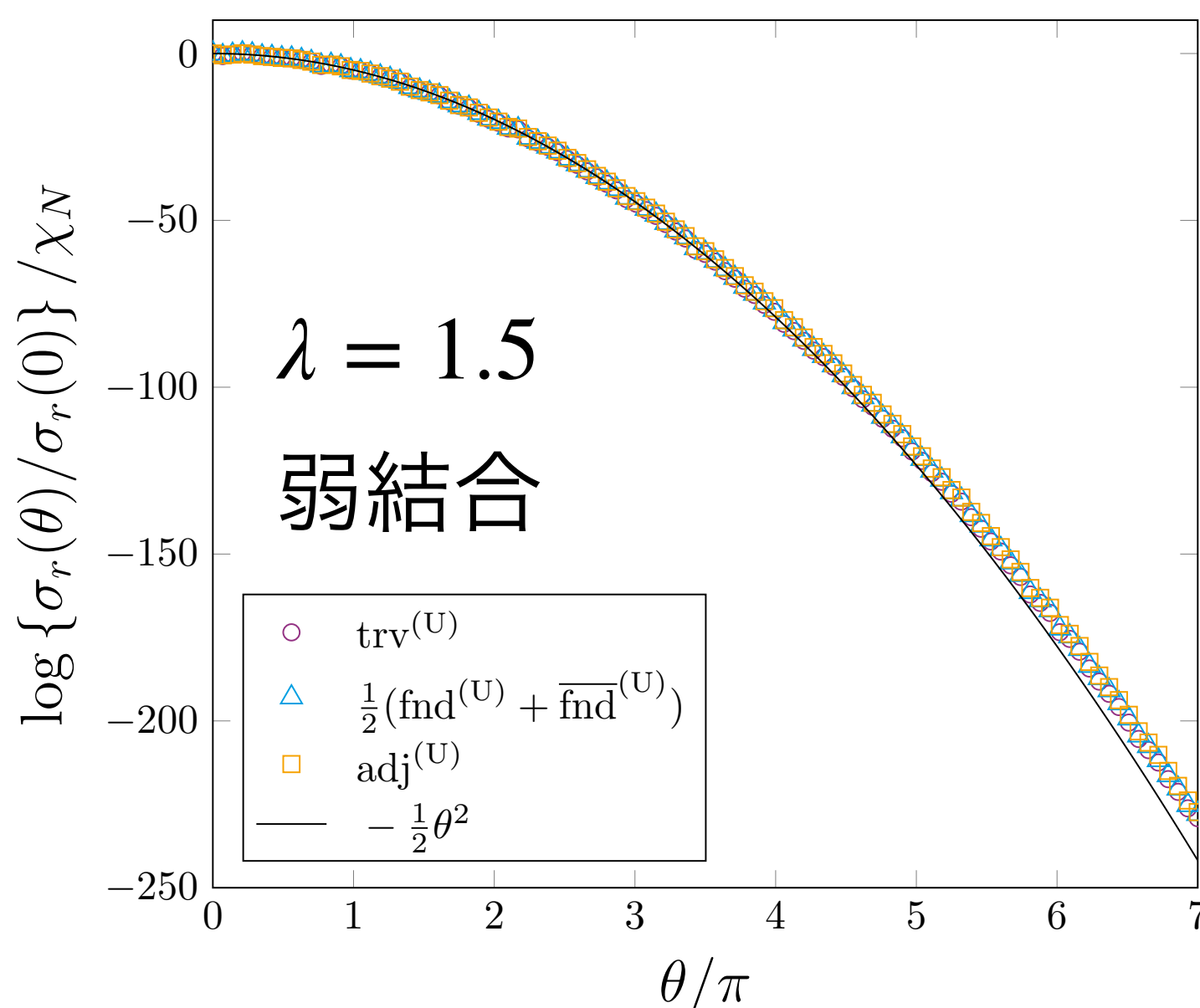
$$\frac{1}{\chi} \log \frac{\sigma_r(\theta)}{\sigma_r(0)} \sim -f(\theta) \text{ のプロット}$$

$f(\theta + 2\pi q) \rightarrow \infty$ となるため

$$e^{-\chi f(\theta+2\pi q)} \rightarrow 0$$

- 結果として、large-Nでは

$$\sigma_{(r^{(\text{SU})}, q_0)}(\theta) \propto e^{-\chi f(\theta)} \text{ だけ残る}$$



large-Nにおける特異値の振る舞い

- $\theta = 0$ における特異値のlarge-N展開 $\rightarrow N^2$ の項は表現に依らない

$$\sigma_{(r^{(\text{SU})}, q_0)}(0) = \exp \left(C^{(0)} N^2 + C_{(r^{(\text{SU})}, q_0)}^{(1)} + O(1/N) \right)$$

- θ 項も含めると、強結合の場合にlarge-Nで寄与する特異値は…

$$\sigma_{(r^{(\text{SU})}, q_0)}(\theta) = \exp \left(C^{(0)} N^2 - \chi f(\theta) + C_{(r^{(\text{SU})}, q_0)}^{(1)} + O(1/N) \right)$$

$\rightarrow \theta$ 依存性を担う部分も、表現に依らないものだけが残る

θ を含む場合の large-N reduction

- 強結合かつ large-N での分配関数

$$\frac{1}{V} \log Z = C^{(0)} N^2 - \chi f(\theta) + \frac{1}{V} \log \left(\sum_r e^{V C_r^{(1)}} \right) + \dots \quad Z = \sum_r (\sigma_r)^V \quad \sigma_r = \frac{|\gamma_r|}{d_r}$$

- $O(N^2)$ の項 $\rightarrow \theta = 0$ における Eguchi-Kawai reduction [Eguchi & Kawai (1982)]
- $f(\theta)$ が θ 依存性を担う \rightarrow 関連する物理量が V に依存しない

$$\frac{1}{V} \text{Im} \langle Q \rangle = -\frac{1}{V} \frac{d}{d\theta} \log Z = \chi \frac{d}{d\theta} f(\theta)$$

- $\theta \neq 0$ における $O(N^0)$ の large-N reduction

まとめ

- **character展開**を用いたTRGを高ランク ($N \geq 3$) のゲージ理論に適用するためには、特異値への寄与の大きい表現を効率的に選び出す必要がある。
- これには**表現の次元 d_r に上限を課す**方法が適している。
- この手法を用いて、 θ 項を含む2次元 $SU(N) \cdot U(N)$ ゲージ理論の **large-N** における特異値の振る舞いを調べた。
- その結果、通常の Eguchi-Kawai reduction に加えて、それと異なる **$\theta \neq 0$ での large-N reduction** が強結合領域で成り立つことがわかった。

まとめ

- 高次元($d \geq 3$)や物質場を導入した場合、テンソルの構造は非自明となるが、character展開を用いる場合、本研究の手法が同様に有効であるか？
- $\theta \neq 0$ における large-N reduction は、 2×2 の小さな格子であってもトポロジカルな性質が現れることを意味している。トポロジーの情報は、どのようにして large N 行列に埋め込まれているのか？

Thank you for listening.