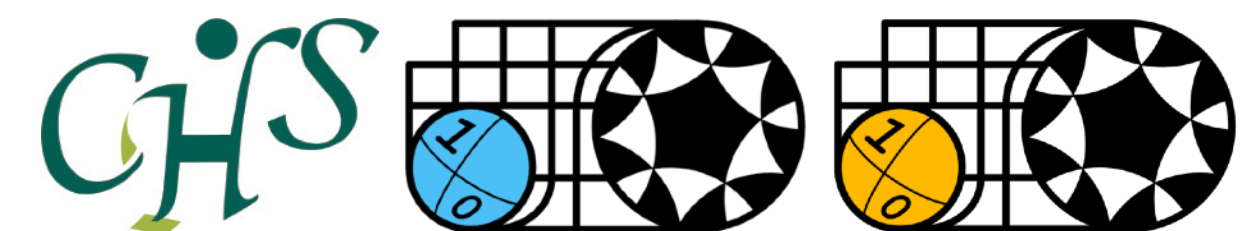


Sine Square Deformation and black hole in AdS/CFT

玉岡 幸太郎 (日大文理)

野崎 雅弘氏 (KITS), Mao Tian Tan氏 (APCTP)

との共同研究 [2310.19376](https://arxiv.org/abs/2310.19376) に基づく



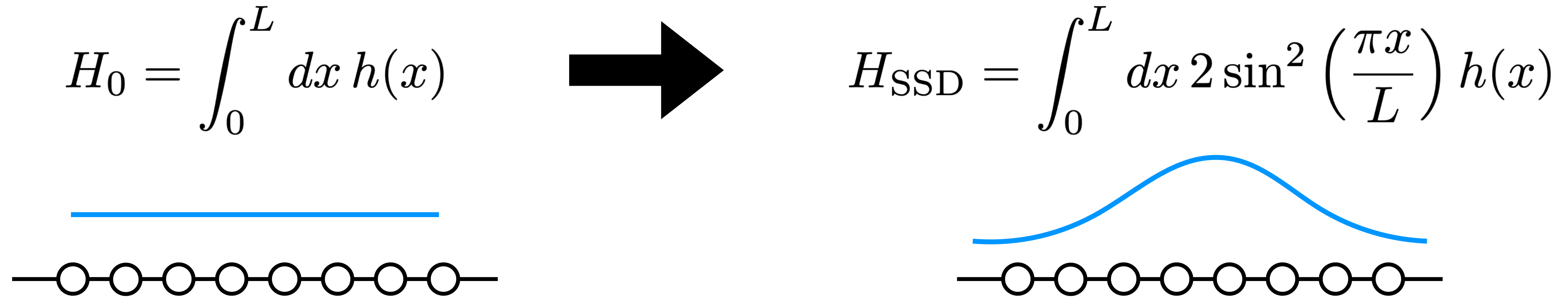
(私の) 大きな Motivation



- 量子重力/ブラックホールの性質を理解したい
- ホログラフィーや TN との類似性が有用

今日の話：ブラックホールを“変形”して変わらない/変わる性質は何か？

今日の話：1+1D CFT に SSD を使って…

$$H_0 = \int_0^L dx h(x) \quad \longrightarrow \quad H_{\text{SSD}} = \int_0^L dx 2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) h(x)$$


- 近似的に励起状態から基底状態の縮約密度行列を作る
(直積状態に使うと、ある種の cMERA として解釈できる)
- ブラックホール/ホログラフィー原理への新たな知見

Plan

1. Background (ホログラフィーとTN)
2. SSD と高エネルギー状態 (ブラックホール)
3. SSD と直積状態 (EoWブレーン)
4. Discussion および 補足

ホログラフィー原理・AdS/CFT対応



$$S_{BH} = \frac{A}{4G_N}$$

面積則（一つ低次元の体積則）に従うエントロピー

Bekenstein, Hawking

ホログラフィー原理

(量子)重力の影響を無視できない系は、一つ次元の低い量子多体系で記述できる

't Hooft, Susskind

例：AdS/CFT対応



ホログラフィーそのものを理解する上での非常に良い具体例！

分かっていないこともたくさん → TNとの類似性が一つの手がかり

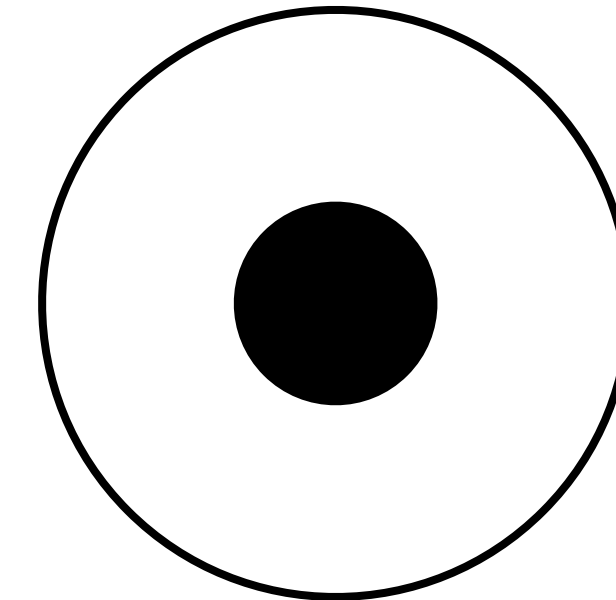
状態間の対応関係の一部

- 基底状態同士の対応

$$|0\rangle_{\text{CFT}_d} \longleftrightarrow |0\rangle_{\text{AdS}_{d+1}}$$

- 熱的状态とブラックホール

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)} \longleftrightarrow \text{Witten}$$



- 弦理論のセットアップから直接構成（トップダウン）
- 対称性の議論や物理量の計算の一致から

重力理論と等価な量子系が満たすべき性質なども議論の対象

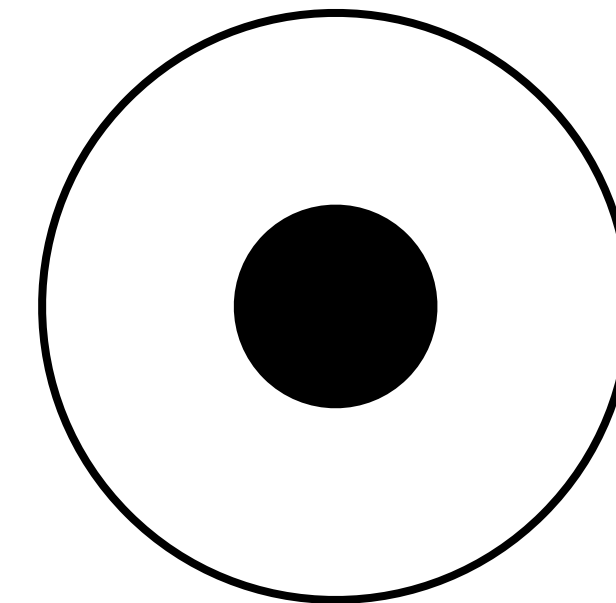
状態間の対応関係の一部

- 基底状態同士の対応

$$|0\rangle_{\text{CFT}_d} \longleftrightarrow |0\rangle_{\text{AdS}_{d+1}}$$

- 熱的状态とブラックホール

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)} \longleftrightarrow \text{Witten}$$



- (非)典型的状態とブラックホールの微視的状态

- TPQ状態 \longleftrightarrow ブラックホール + ミクロなワームホール (“half-wormhole”)

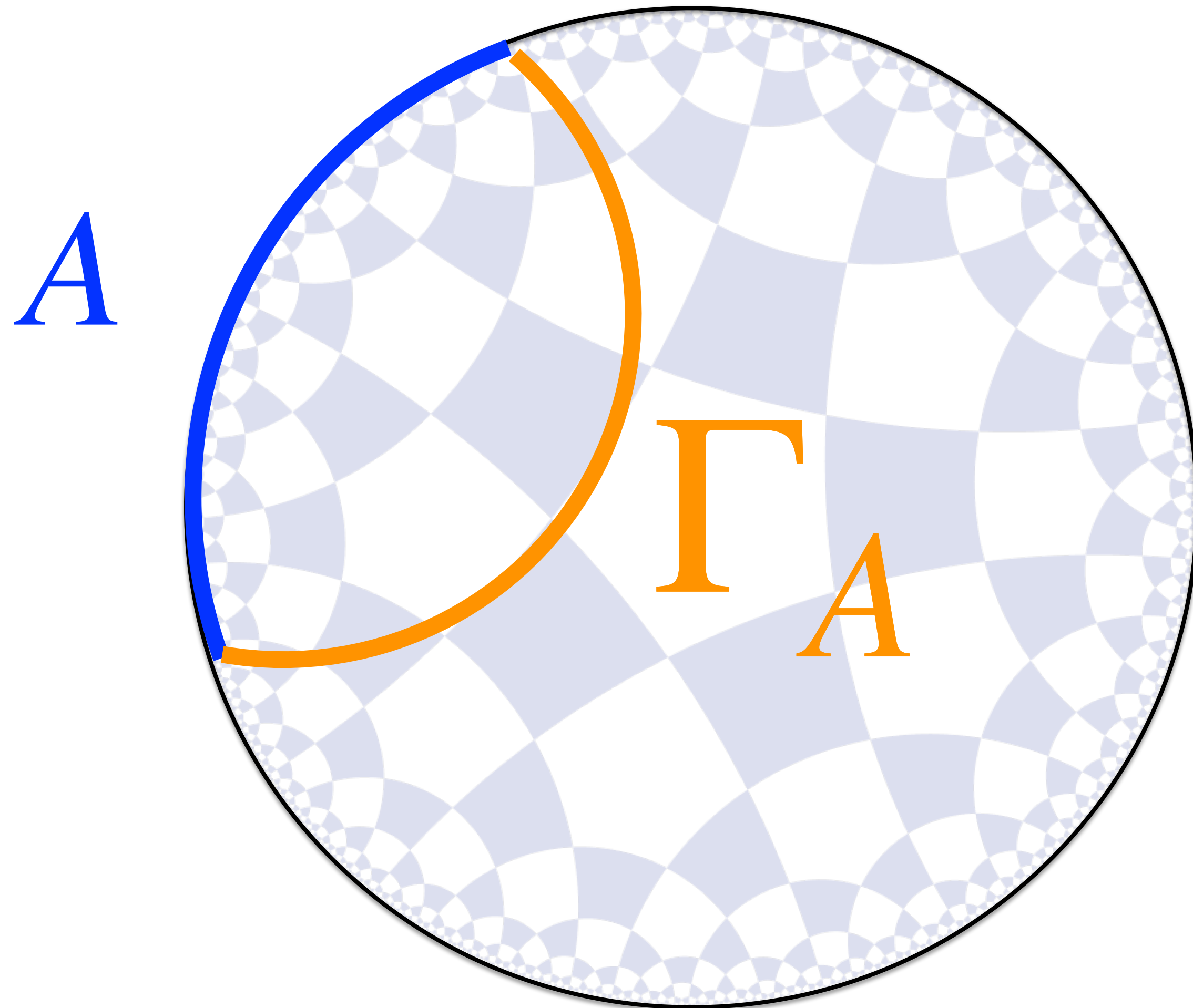
Goto-Kusuki-KT-Ugajin

近年のブラックホール情報喪失問題の理解にも有用!

- METTS (直積状態 x Euclidean 時間発展) \longleftrightarrow ある種のブレーンを含む時空

Kusuki-KT-Wei-Yoneta

時空の計量と双対な量子系のエンタングルメント



$$S_A = \frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N}$$

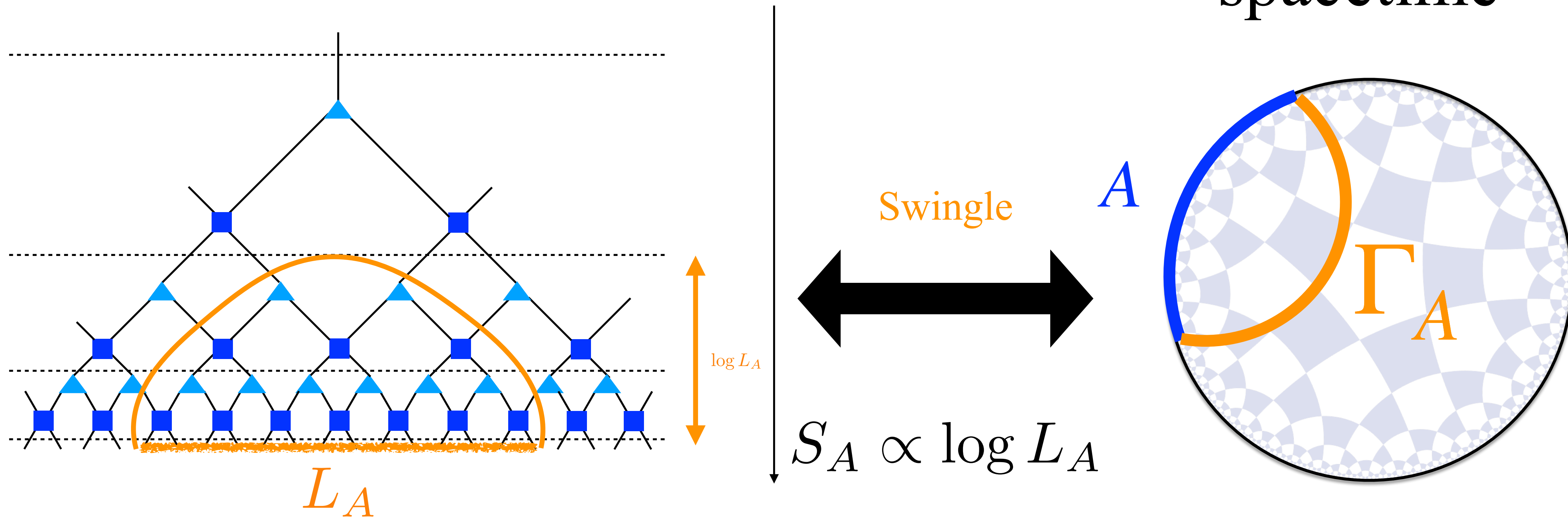
Ryu-Takayanagi

→ TN との類似性が議論されるきっかけ

エンタングルメント構造の一致

MERA Vidal

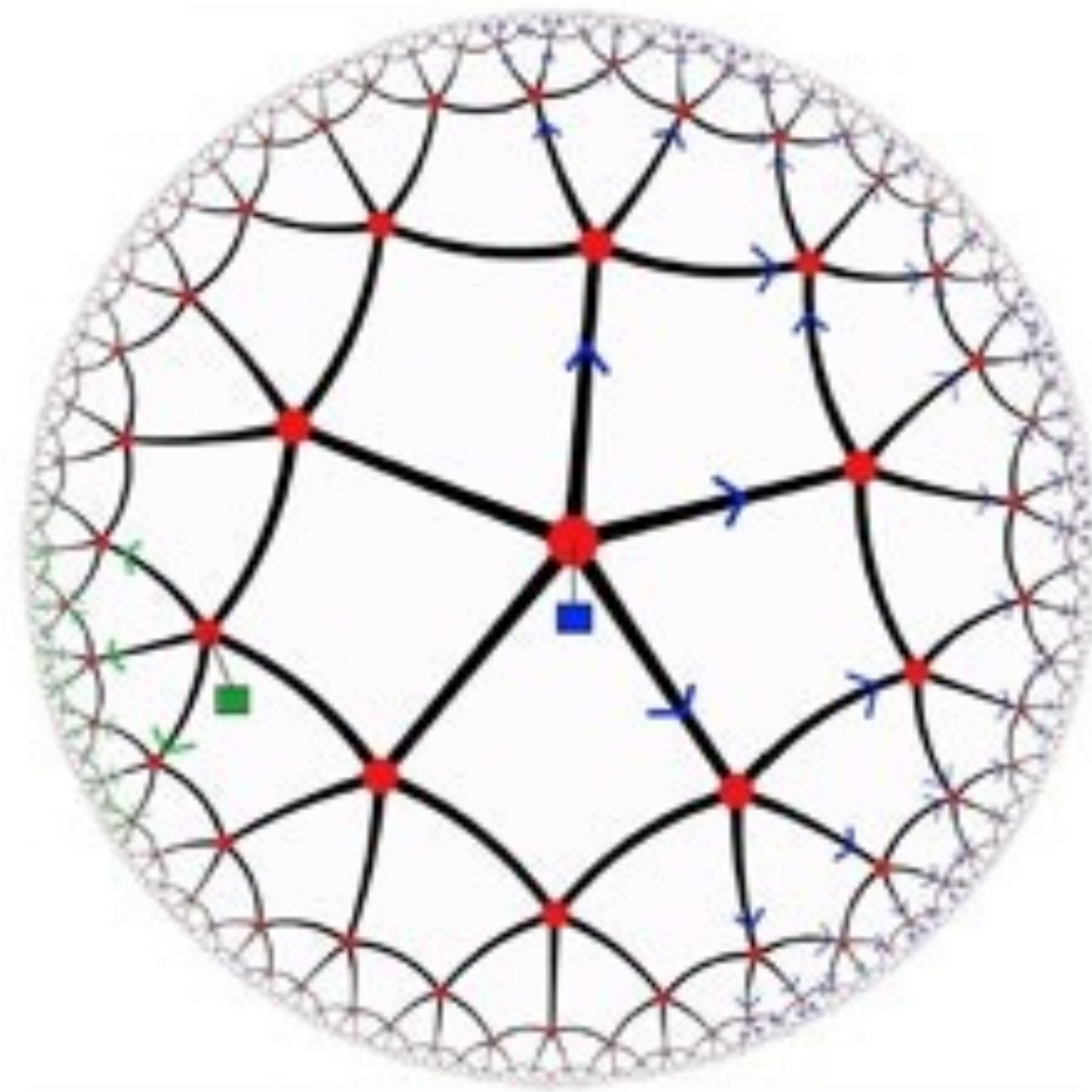
Anti de Sitter (AdS)
spacetime



エネルギースケール方向 = 動径方向

$$S_A = \frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N} \quad \text{Ryu-Takayanagi}$$

AdS (古典極限) → CFTの isometry と誤り訂正符号



HaPPY code (Pastawski-Yoshida-Harlow-Preskill)

- $\mathcal{H}_{\text{low energy}}$ から \mathcal{H}_{CFT} への isometry

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\text{QG}} & \simeq & \mathcal{H}_{\text{CFT}} \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{H}_{\text{low energy}} & \simeq & \mathcal{H}_{\text{code}} \end{array}$$

- ある種の訂正符号は“RT公式”を満たす [Harlow](#)
- Random Tensor Network [Hayden et al.](#)

→ 非摂動効果などを解析的に取り扱える

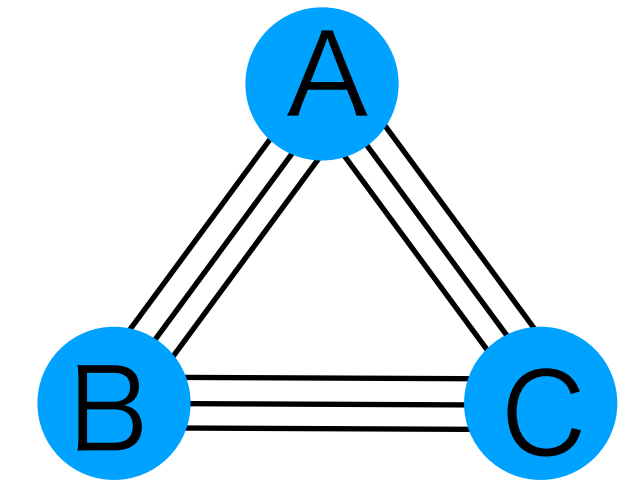
TN/AdS 対応の今後の課題の1例

例) Multi-partite entanglement

典型的なAdS/CFTのトイモデル:

bi-partite entanglement が (large bound dimension で) 支配的

“Triangle State” $|\Psi_{ABC}\rangle \sim |\text{EPR}_{AB}\rangle^{\otimes a} |\text{EPR}_{BC}\rangle^{\otimes b} |\text{EPR}_{CA}\rangle^{\otimes c}$



しかし、実際にはある種の多体エンタングルメントが重要だと期待されている

Reflected entropy と相互情報量の差

$H_{A:B} \equiv S_R(\rho_{AB}) - I_{A:B}$ を計算すると...

$$S_R(\rho_{AB}) = S(\rho_{AA^*}) |\sqrt{\rho_{AB}}_{AA^* BB^*}\rangle$$

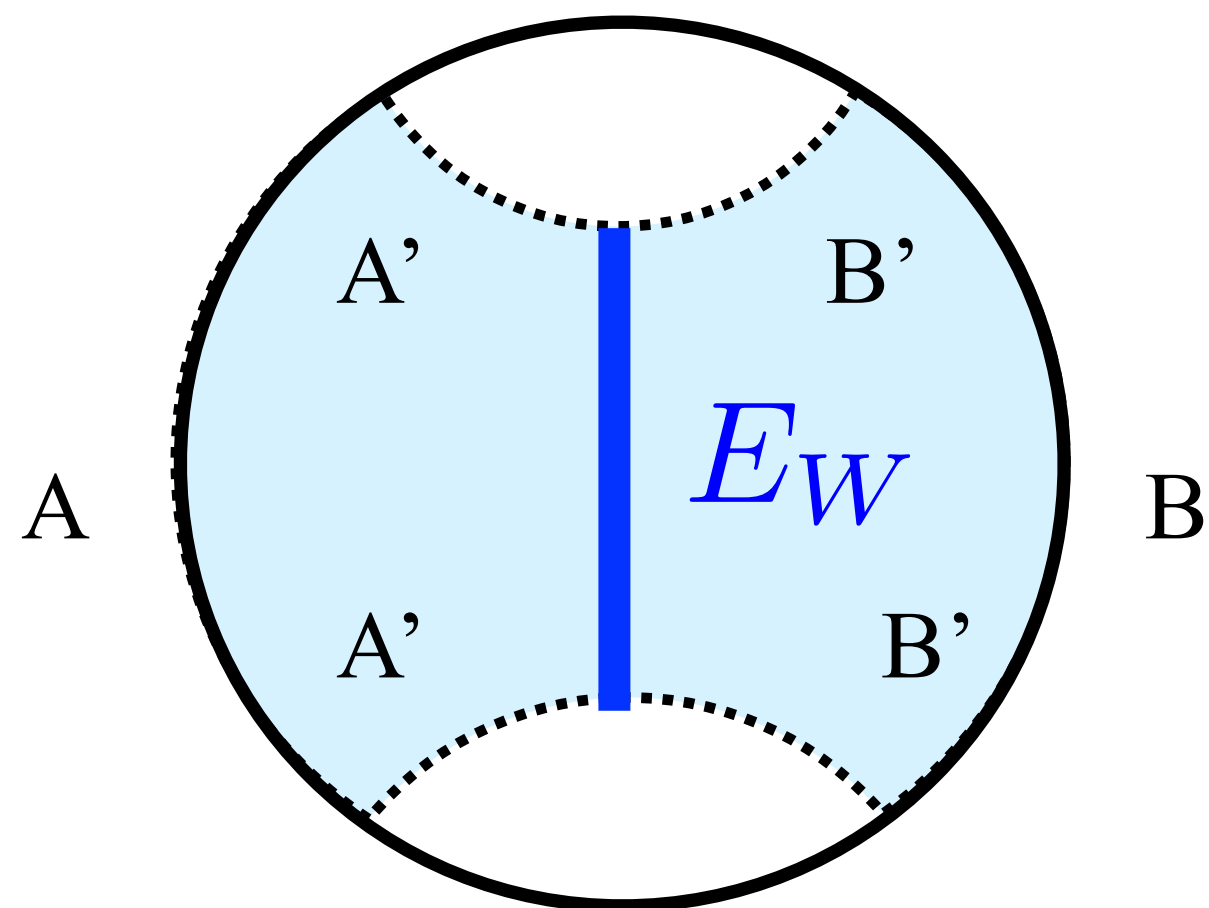
Dutta-Faulkner

Canonical purification

$$\rho_{AB} = \sum_n p_n |n_{AB}\rangle \langle n_{AB}| \longrightarrow |\sqrt{\rho_{AB}}_{AA^* BB^*}\rangle = \sum_n \sqrt{p_n} |n_{AB}\rangle |n_{A^* B^*}\rangle$$

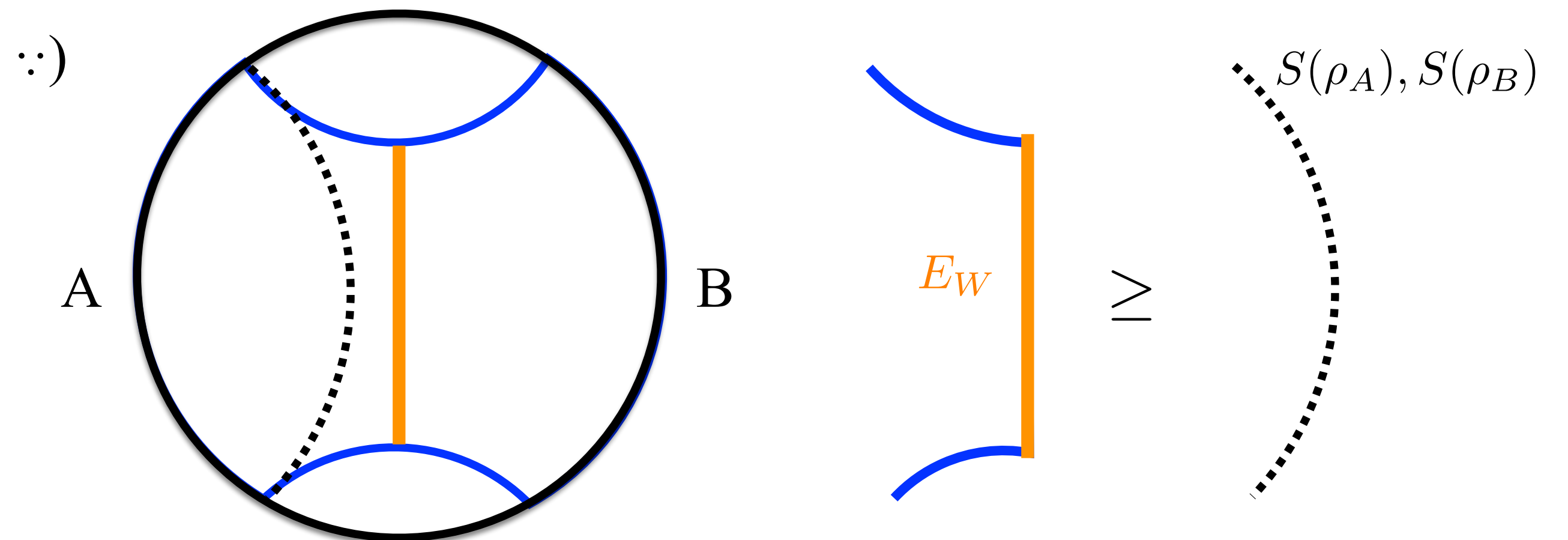
- Holographic な CFTでは正の値を取るが、 Toy Modelでは0 Aker-Rath

$$2E_W \geq I_{AB} = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$$



Umemoto-Takayanagi

Nguyen et al.



Reflected entropy と相互情報量の差

$H_{A:B} \equiv S_R(\rho_{AB}) - I_{A:B}$ を計算すると...

$$S_R(\rho_{AB}) = S(\rho_{AA^*}) |\sqrt{\rho_{AB}}_{AA^* BB^*}\rangle$$

Canonical purification

$$\rho_{AB} = \sum_n p_n |n_{AB}\rangle \langle n_{AB}| \longrightarrow |\sqrt{\rho_{AB}}_{AA^* BB^*}\rangle = \sum_n \sqrt{p_n} |n_{AB}\rangle |n_{A^* B^*}\rangle$$

• Holographic な CFTでは正の値を取るが、 Toy Modelでは0

• 2種類の (genuine) tri-partite entangled state

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B 0_C\rangle + |1_A 1_B 1_C\rangle) \quad H_{A:B} = 0$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0_A 0_B 1_C\rangle + |0_A 1_B 0_C\rangle + |1_A 0_B 0_C\rangle) \quad H_{A:B} > 0 \quad \text{c.f. REの代わりにEoPを使うとGHZでも正}$$

• 一般に、 triangle stateの和 (GHZの一般化) に対して、 $H=0$

Zou-Siva-Soejima-Mong-Zaletel

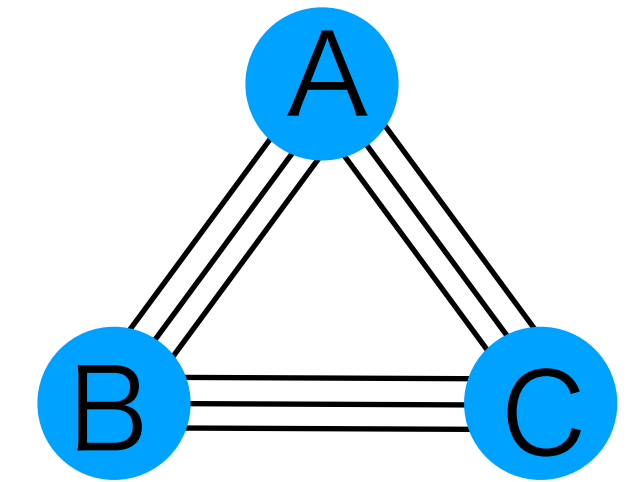
TN/AdS 対応の今後の課題の1例

例) Multi-partite entanglement

典型的なAdS/CFTのトイモデル:

bi-partite entanglement が (large bound dimension で) 支配的

“Triangle State” $|\Psi_{ABC}\rangle \sim |\text{EPR}_{AB}\rangle^{\otimes a} |\text{EPR}_{BC}\rangle^{\otimes b} |\text{EPR}_{CA}\rangle^{\otimes c}$



$H_{A:B} > 0$ となるような & 他の性質を満たす
TN model は作れないか？

CFT ground stateを近似するTNの多体エンタングルメント？

ここまでの話のまとめ

ホログラフィーの重要な性質は TN で表現できる場合が多い

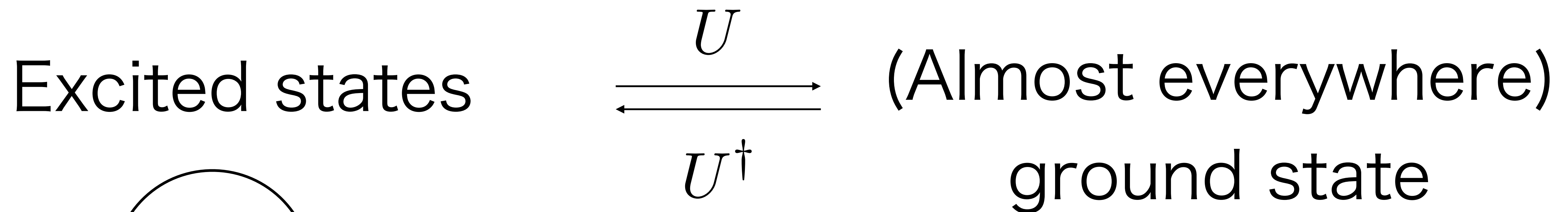
主要なエンタングルメント構造、重力と CFT 間の map そのもの、...

2. SSD と高エネルギー状態 (ブラックホール)

3. SSD と直積状態 (EoWブレーン)

4. Discussion および 補足

SSD Hamiltonianを用いたクエンチを考える



熱的状态 と 直積状態

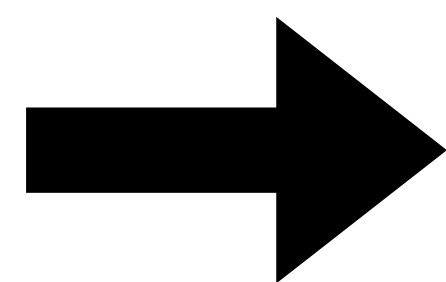
Goto-Nozaki-Ryu-KT-Tan

Nozaki-KT-Tan

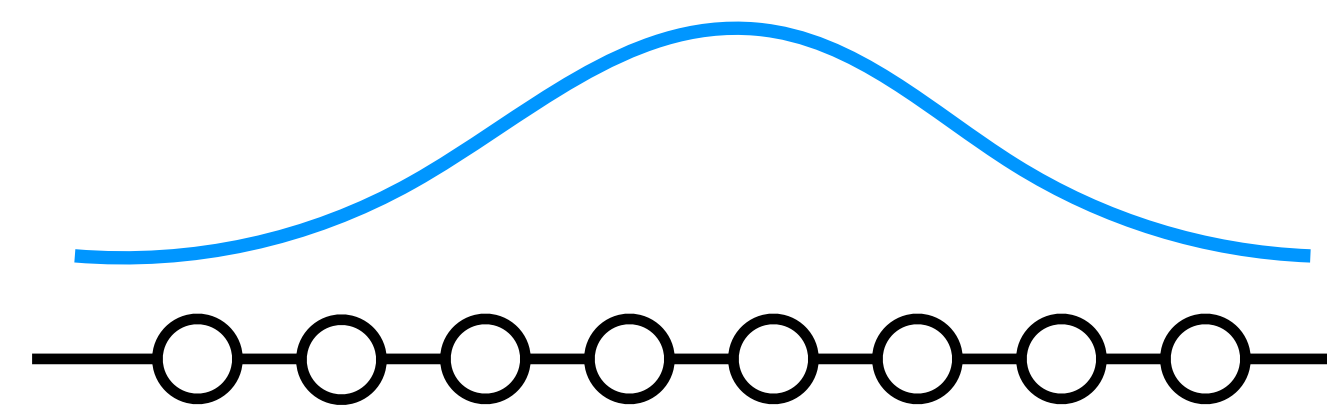
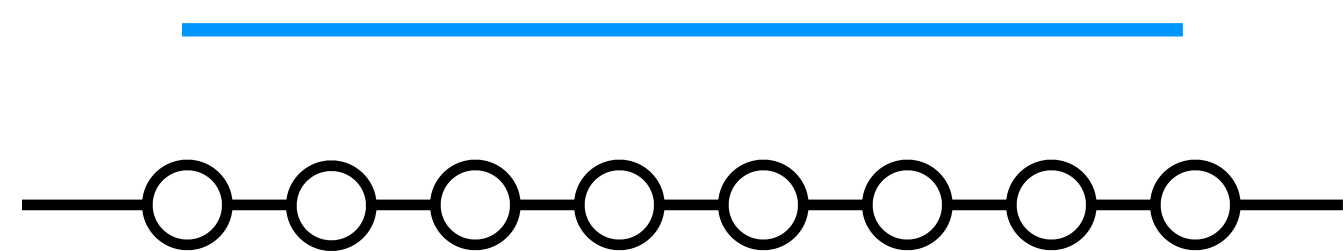
$$U = e^{iHt} \quad H : \text{Sine-square-deformed (SSD) Hamiltonian}$$

Sine-Square-Deformation (SSD)

$$H_0 = \int_0^L dx h(x)$$



$$H_{\text{SSD}} = \int_0^L dx 2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) h(x)$$



- $|0\rangle_{\text{open}}^{\text{SSD}} = |0\rangle_{\text{periodic}} \rightarrow$ 数値計算の際に有用

! SSD が boundary effect を弱める

Gendiar-Kremer-Nishino, Hikiyara-Nishino, Shibata-Hotta, Maruyama-Katsura-Hikiyara, ...
CFT: Katsura, Tada-Ishibashi, Okunishi, Wen-Ryu-Ludwig, ...

(ただし、今回は初めから空間方向は周期境界の系を考える)

- H_{SSD} in 2D CFT は $SL(2, \mathbb{R})$ generators の線形和でかける

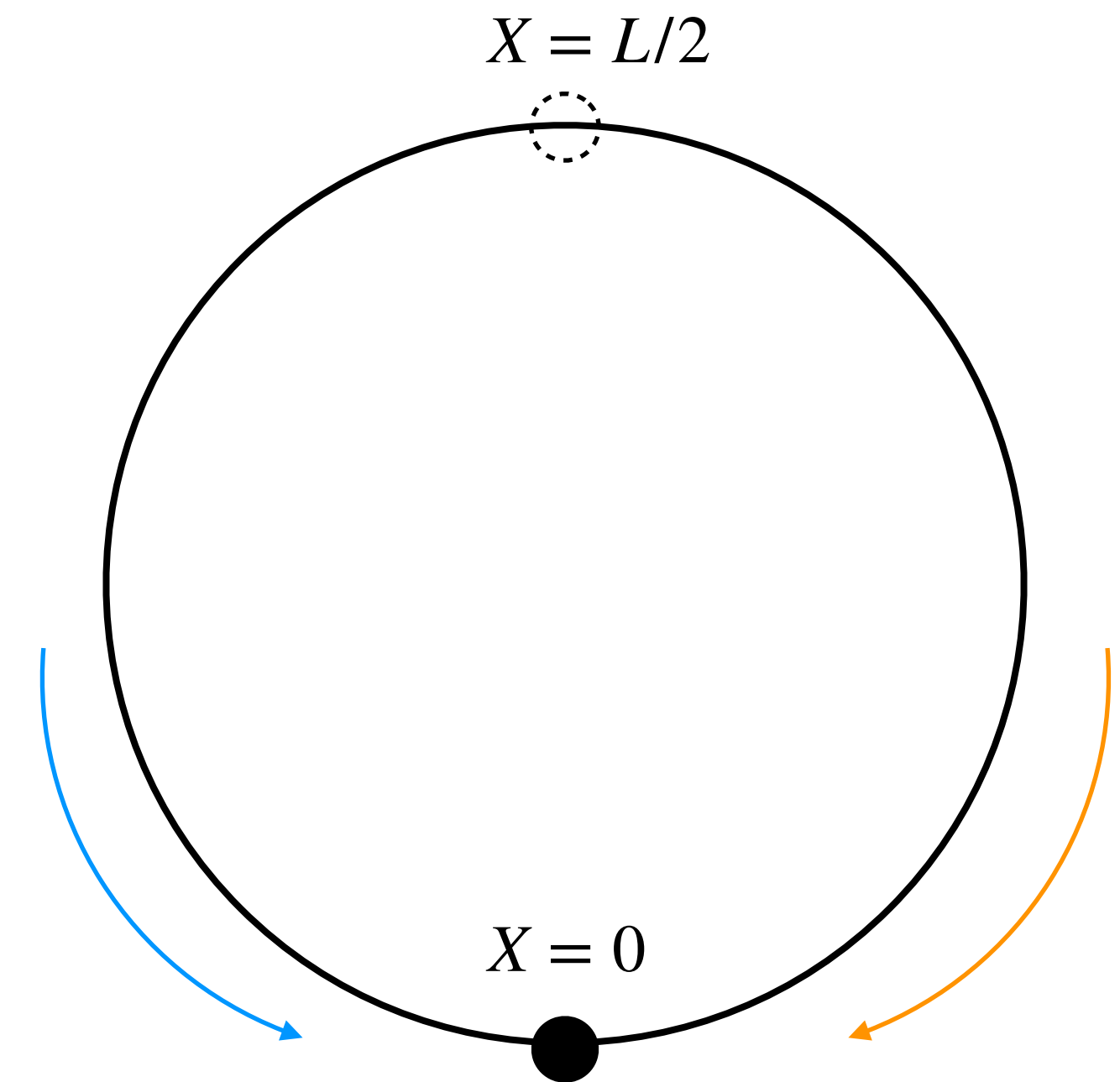
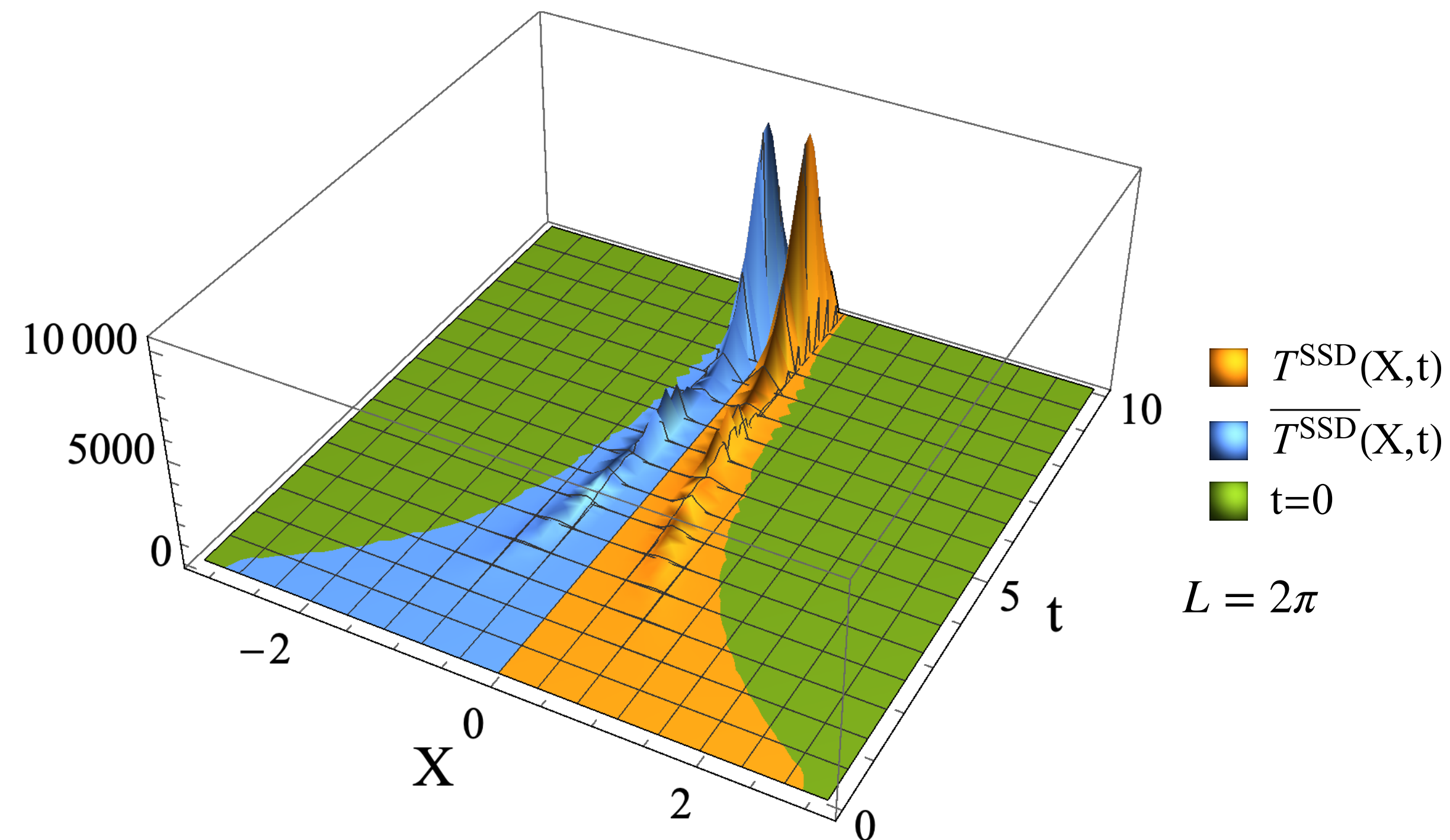
$$H_{\text{SSD}} = \frac{2\pi}{L} \left[L_0 - \frac{1}{2}(L_1 + L_{-1}) - \frac{c}{24} + (\text{anti-hol}) \right]$$

\rightarrow A tractable example of Hamiltonian with inhomogeneity

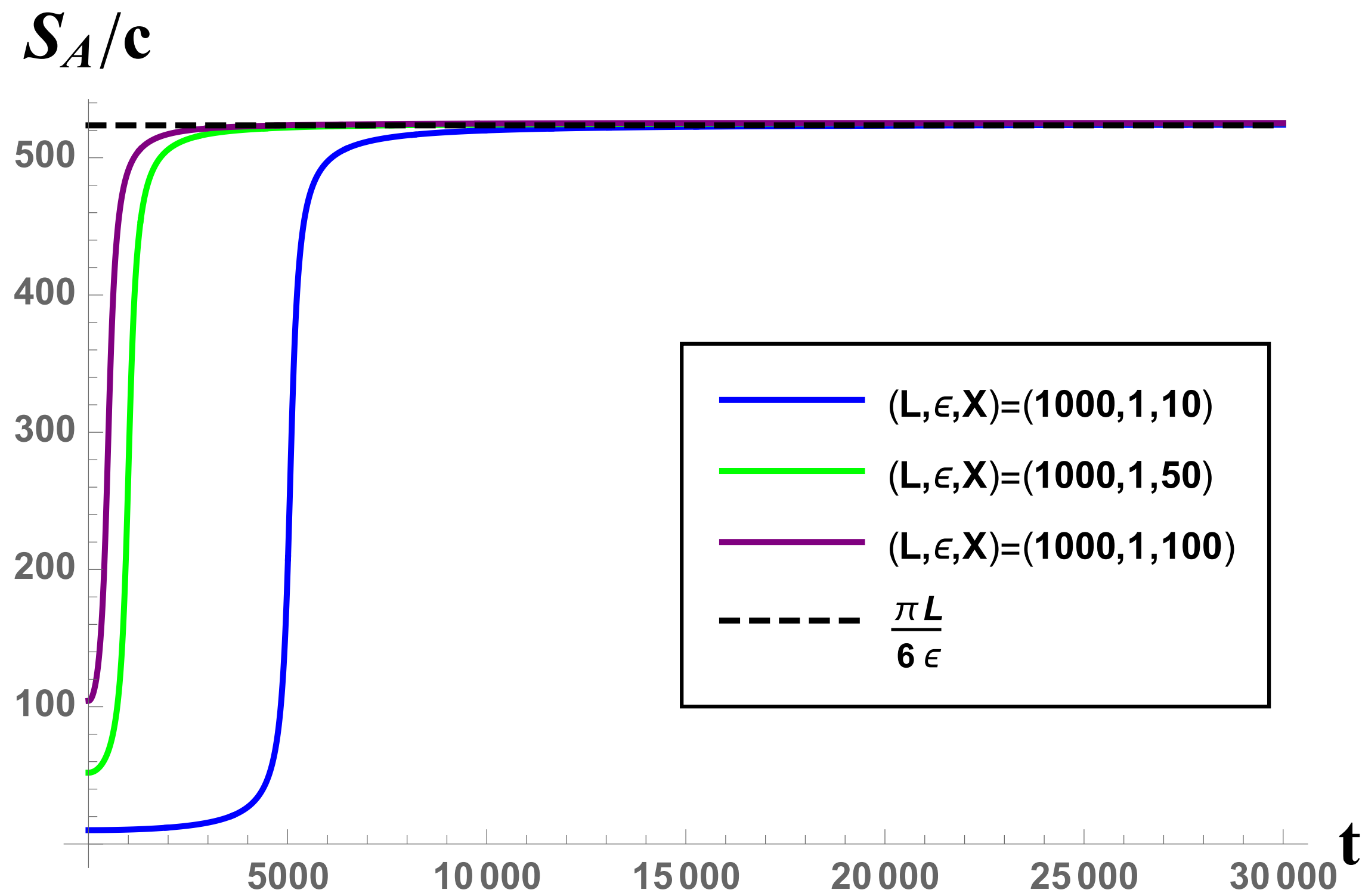
Energy flow at the boundary (stress tensor)

$$T^{\text{SSD}}(X, t) = \frac{2M}{\left(\left(\frac{2\pi t}{L} \right)^2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi X}{L} \right) \right) - 2 \left(\frac{2\pi t}{L} \right) \sin \left(\frac{2\pi X}{L} \right) + 2 \right)^2} + (\text{const.})$$

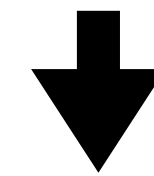
c.f. Balasubramanian-Kraus



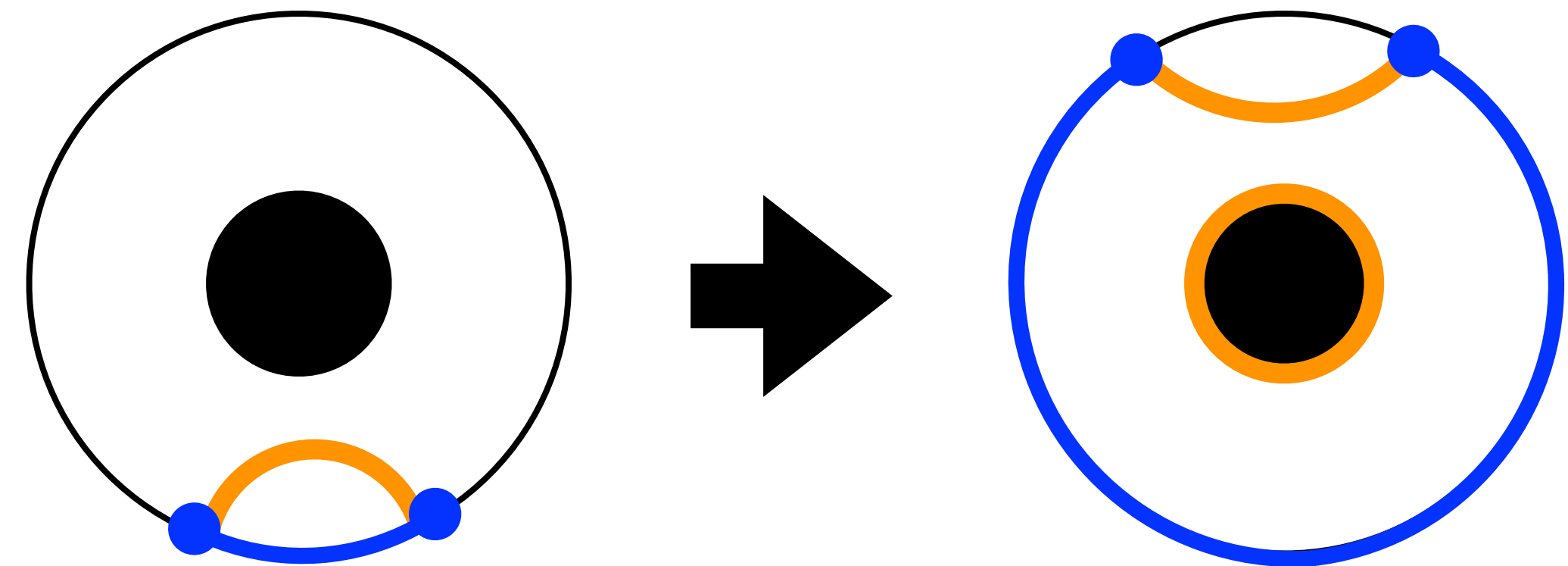
Holographic Entanglement Entropy



Using “Heisenberg picture” developed in the paper



Ryu-Takayanagi formula in the static BTZ black hole with the “expanding subsystem”



Degrees of freedom localized on a point

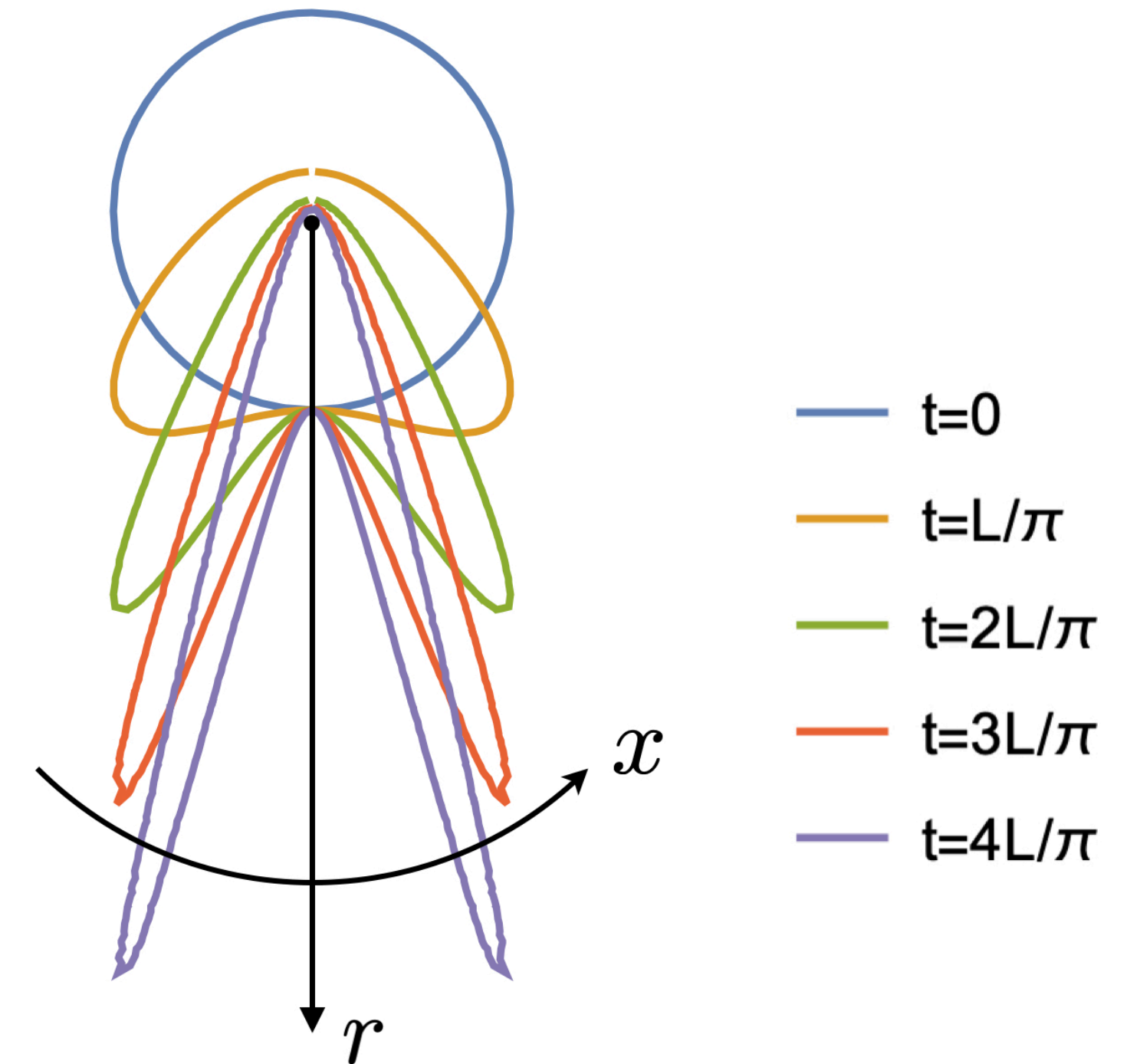
Sine-Square-Deformed Horizon

Strategy: using boundary conformal symmetry (Banados geometry) and rescaling

$$ds^2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{dr^2}{r^2} + r^2 \left(\underline{-4 \sin^4 \left(\frac{\pi x}{L} \right)} dt^2 + dx^2 \right)$$

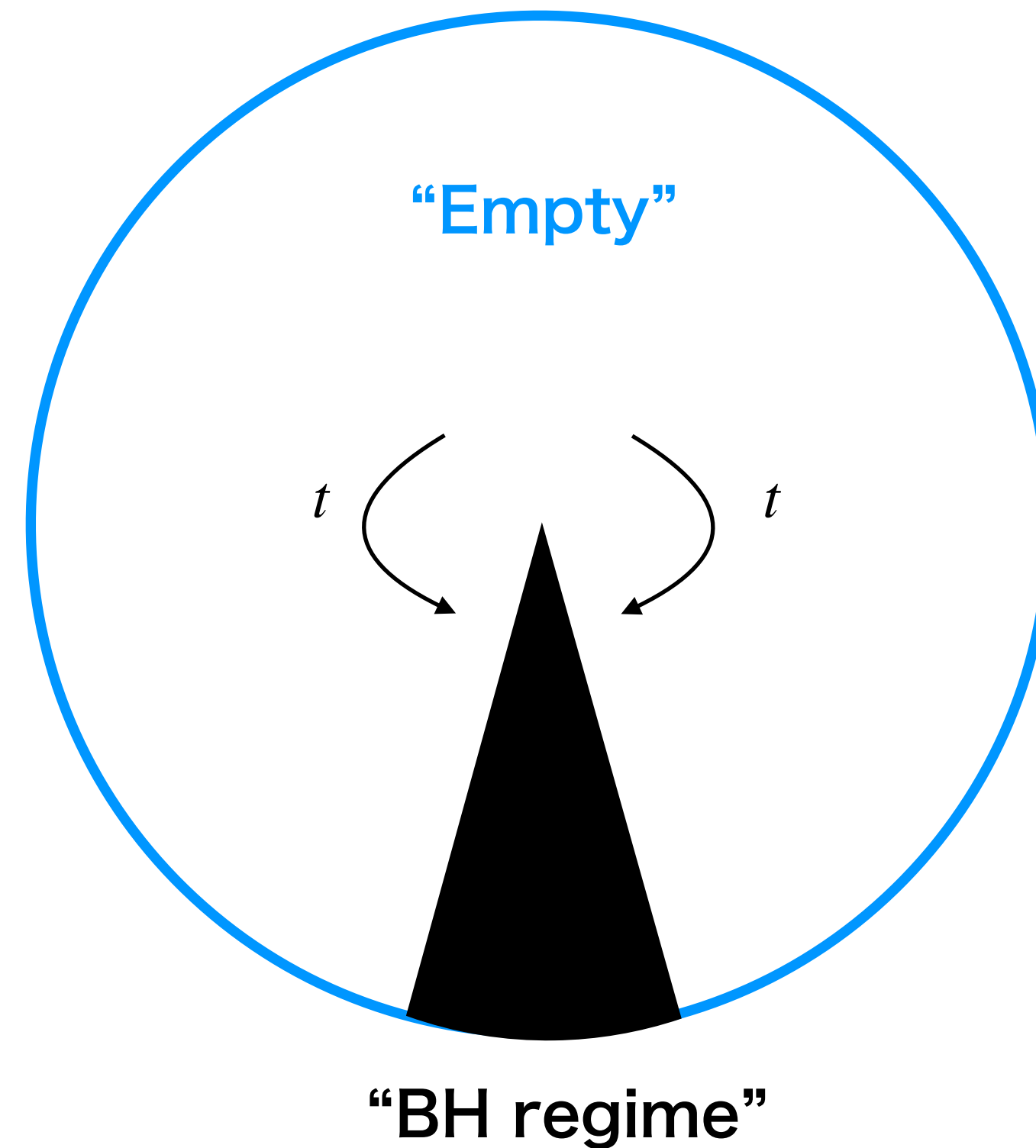
$$r_{\text{horizon}}(x, t) = L^2 \sqrt{\frac{8GM}{g(x, t)}}$$

$$g(x, t) = 16\pi^2 L^2 t^2 \sin^4 \left(\frac{\pi x}{L} \right) + \left(L^2 - 4\pi^2 t^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right)^2$$



Full metric is not shown (very complicated!)

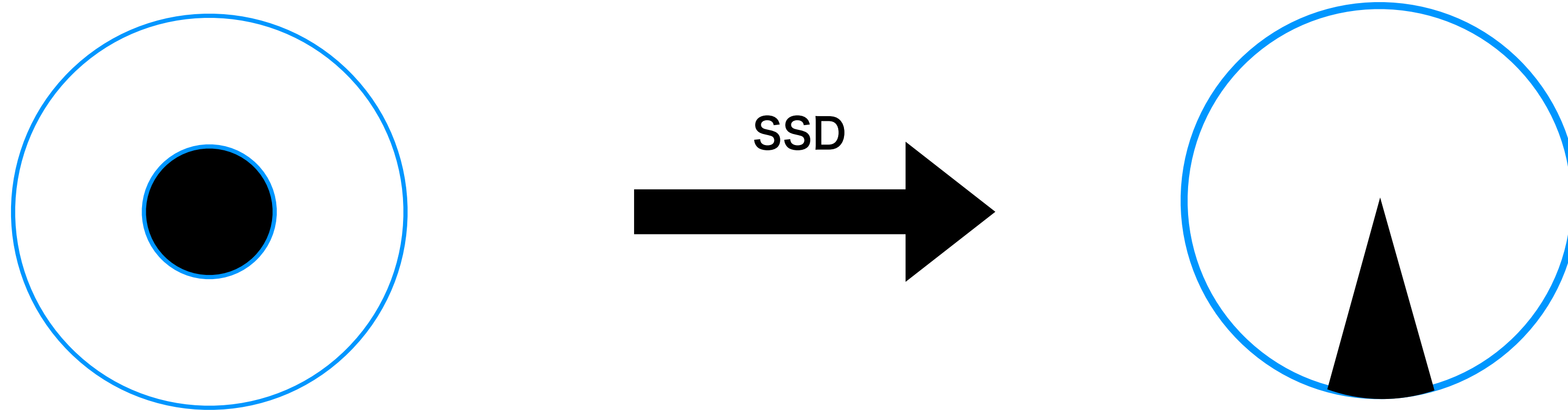
Almost everywhere empty AdS



- 縮約密度行列は BH regime を除いて基底状態と等価
- 励起状態 (純粋状態) でも同様な議論が可能

ここまでの話のまとめ

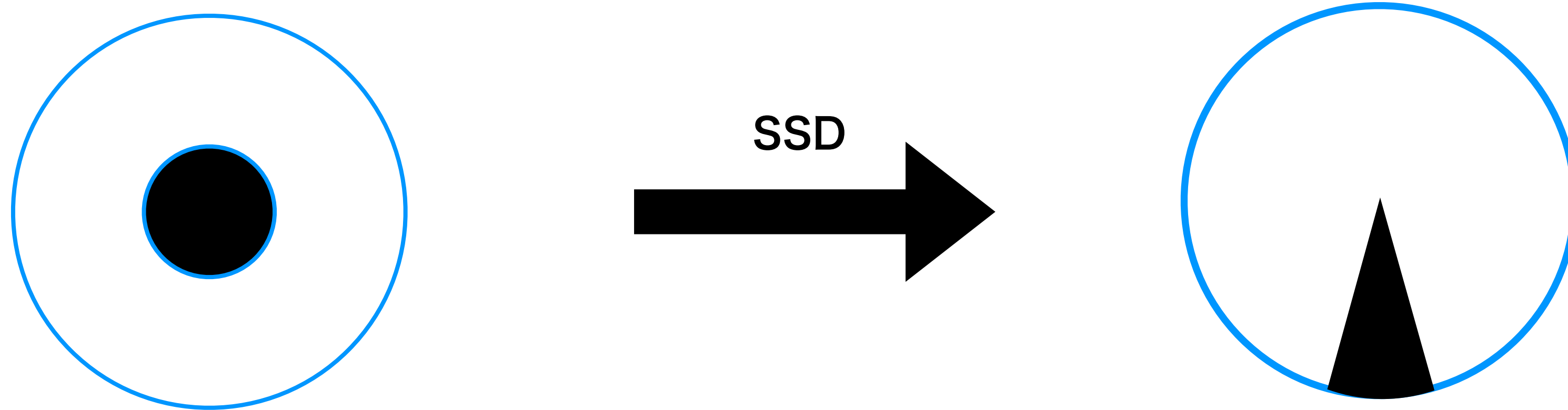
SSDクエンチで、縮約密度行列がほとんど至る所元の基底状態と等価に



3. SSD と直積状態 (EoWブレーン)

4. Discussion および 補足

基底状態を用意するのに役立つ？



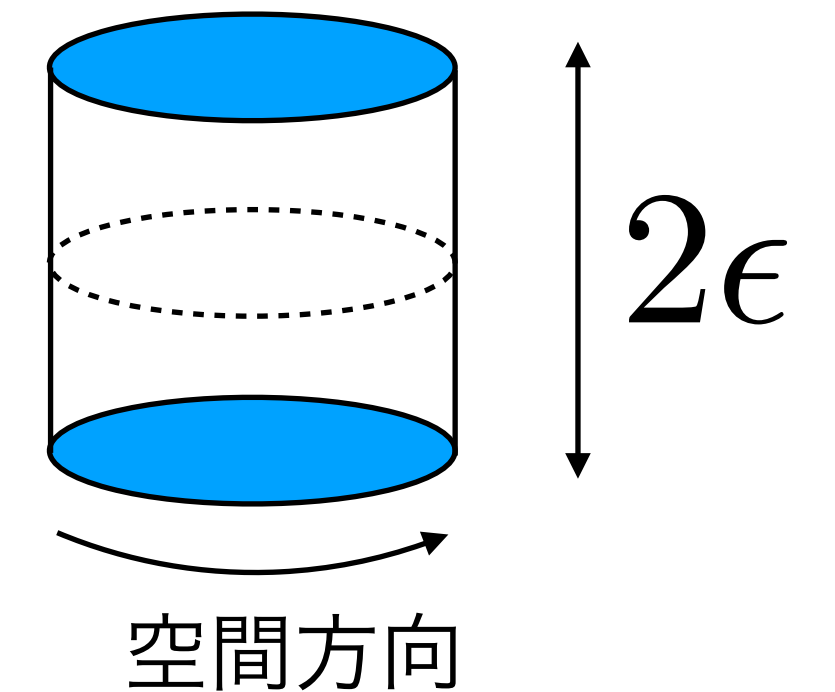
“直積”状態からスタートして、
基底状態を作れるか？

直積状態：Conformal boundary state

$$|B_\epsilon\rangle \equiv e^{-\epsilon H} |B\rangle$$

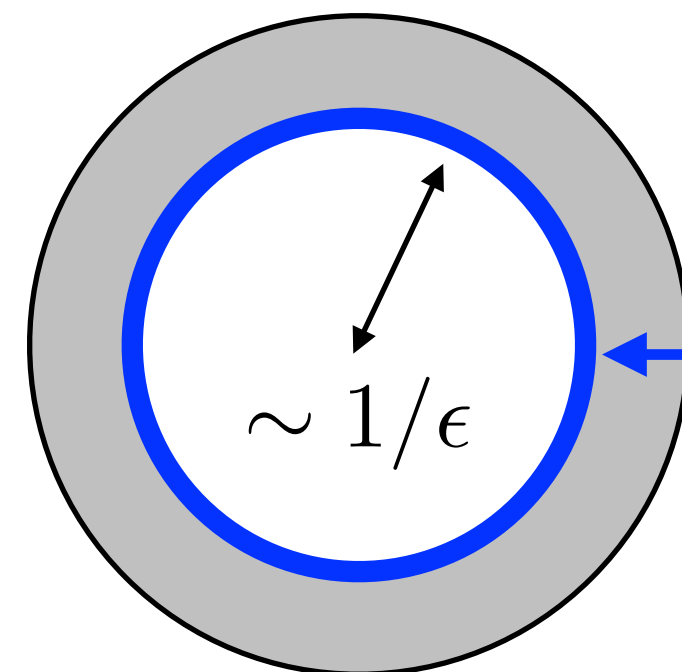
ϵ ：規格化のための“UV cutoff” (lattice spacing とは本来別物)

B：共形対称性と consistent な境界状態 (ただし境界は Euclidean 時間方向)



$|B_\epsilon\rangle$ は (近似的に) 直積状態： $\langle B_\epsilon | \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) | B_\epsilon \rangle \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \langle \mathcal{O}_1(x_1) \rangle \langle \mathcal{O}_2(x_2) \rangle$

重力双対：



End of the world brane

内側の時空が無い (entanglement \rightarrow bulk geometry の逆!)

SSD時間発展で縮約密度行列が基底状態へ

Nozaki-KT-Tan

$$S(\rho_A^{B_\epsilon}) \xrightarrow{t \gg t_*} S(\rho_A^{0}) \quad t_* = \frac{L}{4\pi} \sqrt{\frac{L \sin\left(\frac{\pi|x_1-x_2|}{L}\right)}{\epsilon \sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)}}$$

ただし、部分系Aは SSD envelop function の固定点を含まない

- 相互情報量などでも同様の議論が成立
- Holographic CFT と free fermion で確認 (中間の時間発展は異なる)

Interpretation as a version of cMERA

$$|\text{product state}\rangle \xrightarrow{U} |\text{CFT ground state}\rangle$$

(ただし、空間の微小領域を除く)

- 空間の微小領域を除いて IR state から UV state へ
- (Dis) entangler や isometry の対応物は一応書ける
- cMERAなので unitary 変換 (実験でも用意可能?)

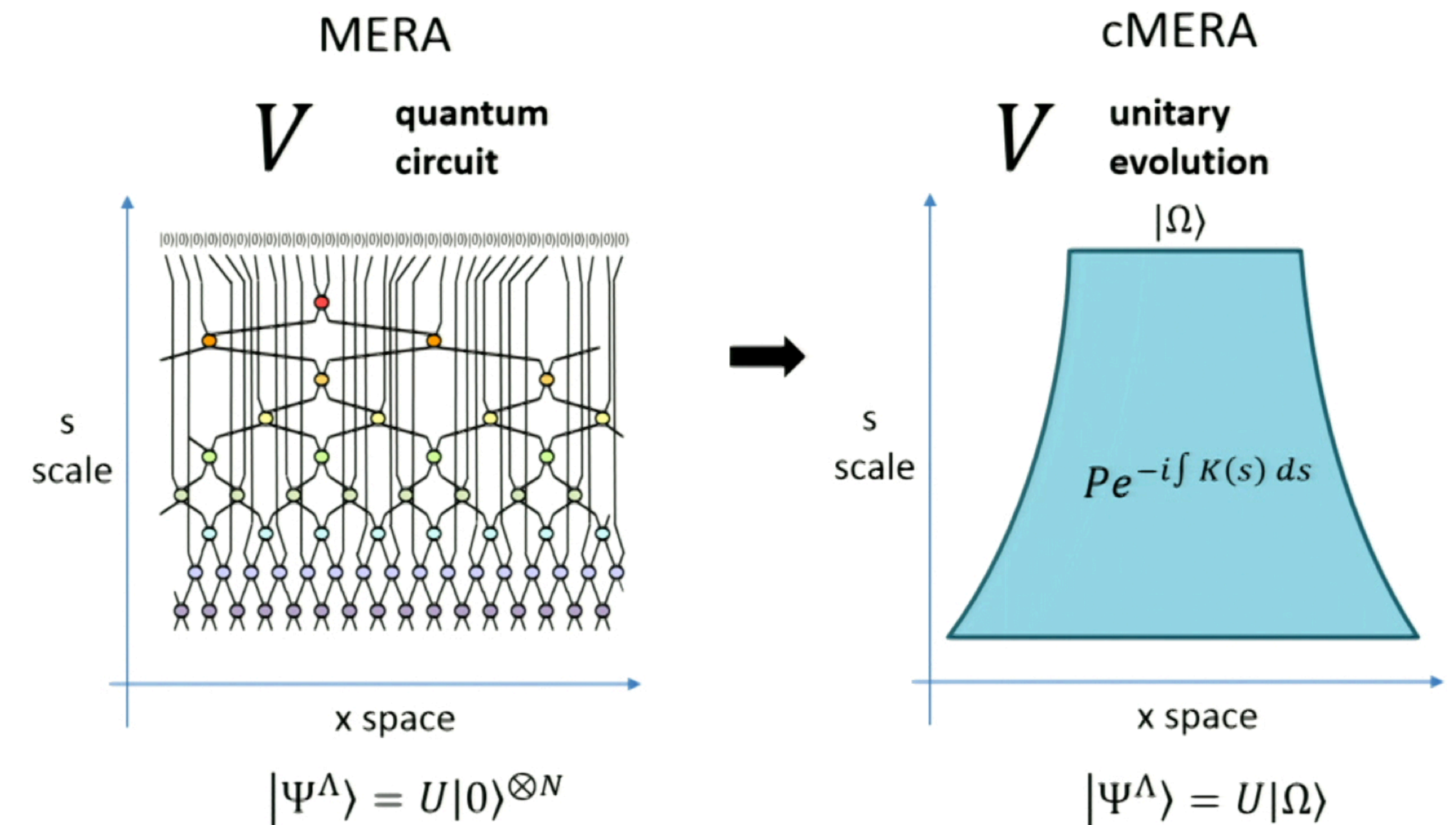
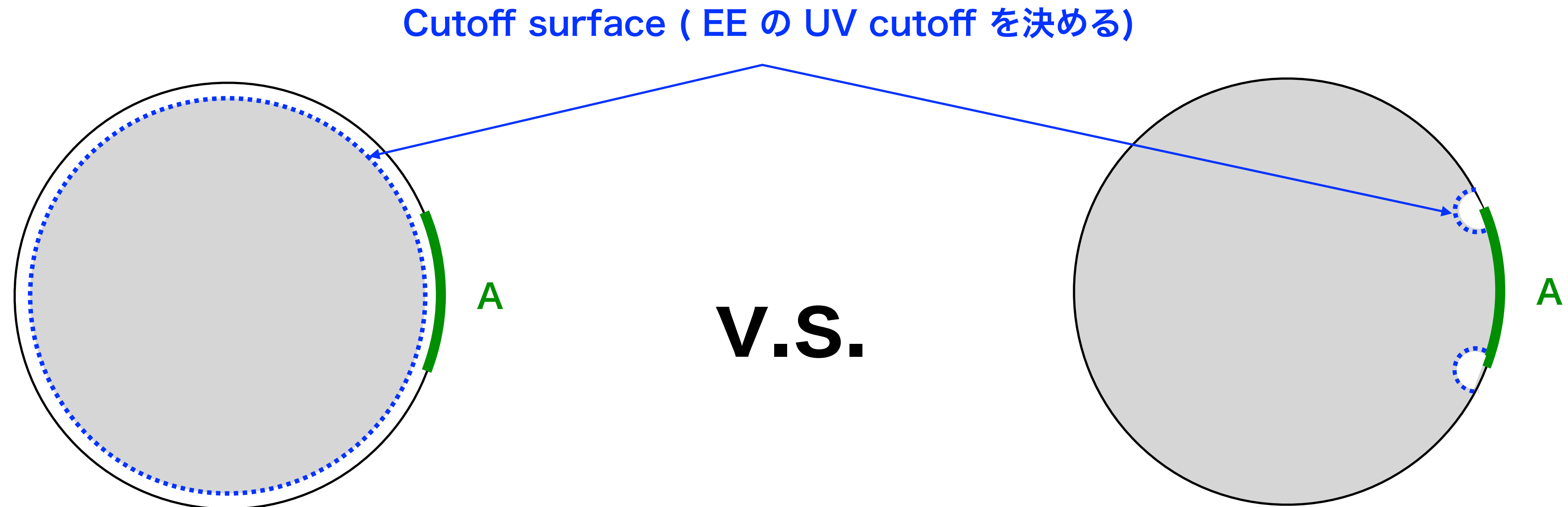


Figure taken from Vidal's slide

量子重力理論 (AdS/CFT対応) への示唆

Nozaki-KT-Tan

Q. 部分系はどのように定義すべきか？



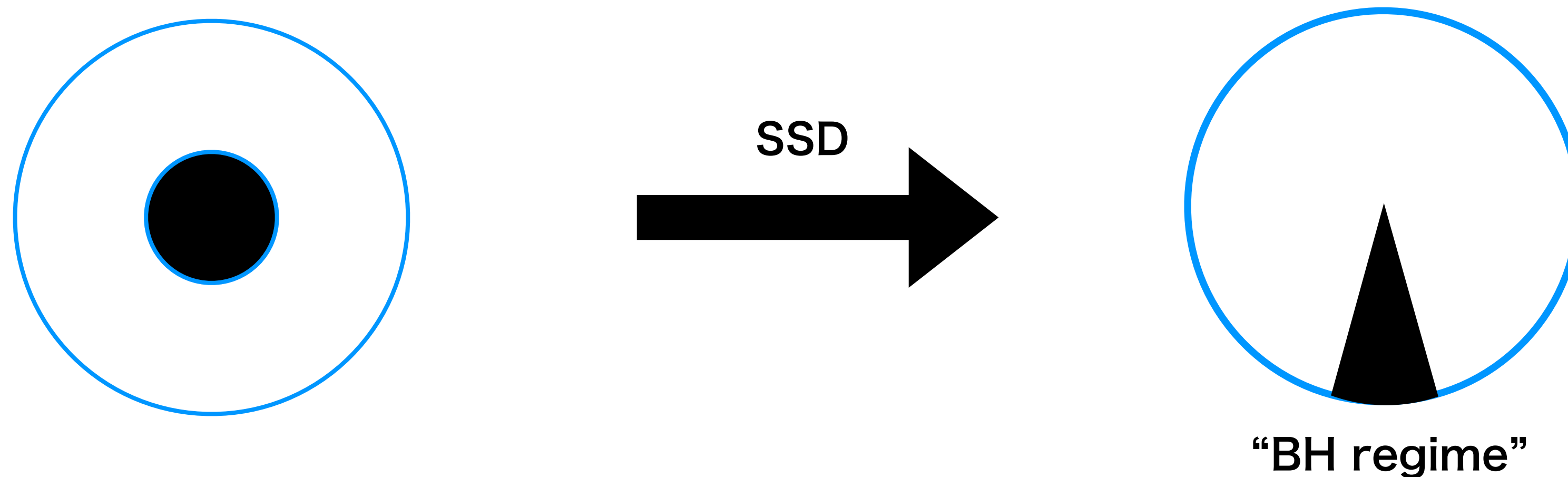
よく使われるもの

SSDの計算から favor されるもの :
cutoff surface は local にすべし

c.f. Ohmori-Tachikawa

まとめ

- ・ホログラフィーの重要な性質は TN で表現できる場合が多い
- ・SSDクエンチで、縮約密度行列がほとんど至る所元の基底状態と等価に



- ・直積状態（共形境界状態）に対しても同様な応用が可能 → 一種のcMERA

今日話さなかったこと

- ・ より一般の変形 (Möbius) によるダイナミクス
- ・ SSDクエンチの後、元のHamiltonianによる時間発展を続けて考えると

従来の AdS/CFT 対応では考えられない現象

1. 準粒子描像の出現 “Black hole like excitation”
2. 新しいタイプの三体相関

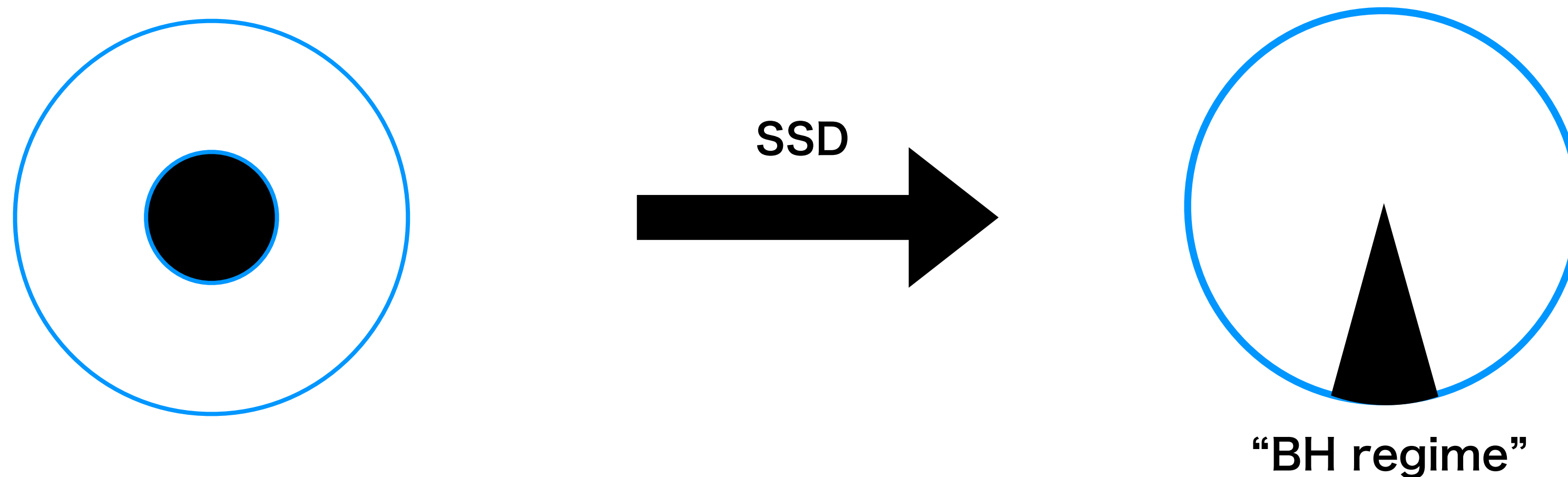
などなど…

今後の展望

- AdS/CFTに必要な多体相関の構造をテンソルネットワークから読み取れるか？
読み取る上で良い指標はないか？
- SSD変形などは曲がった時空の場の理論を考えていることに相当 → 応用？
- 人工量子系を用いて実験的に実現できないか
- 重力理論への示唆（新しい三体相関など）をさらに追求

まとめ

- ・ホログラフィーの重要な性質は TN で表現できる場合が多い
- ・SSDクエンチで、縮約密度行列がほとんど至る所元の基底状態と等価に



- ・直積状態（共形境界状態）に対しても同様な応用が可能 → 一種のcMERA

Information scrambling:

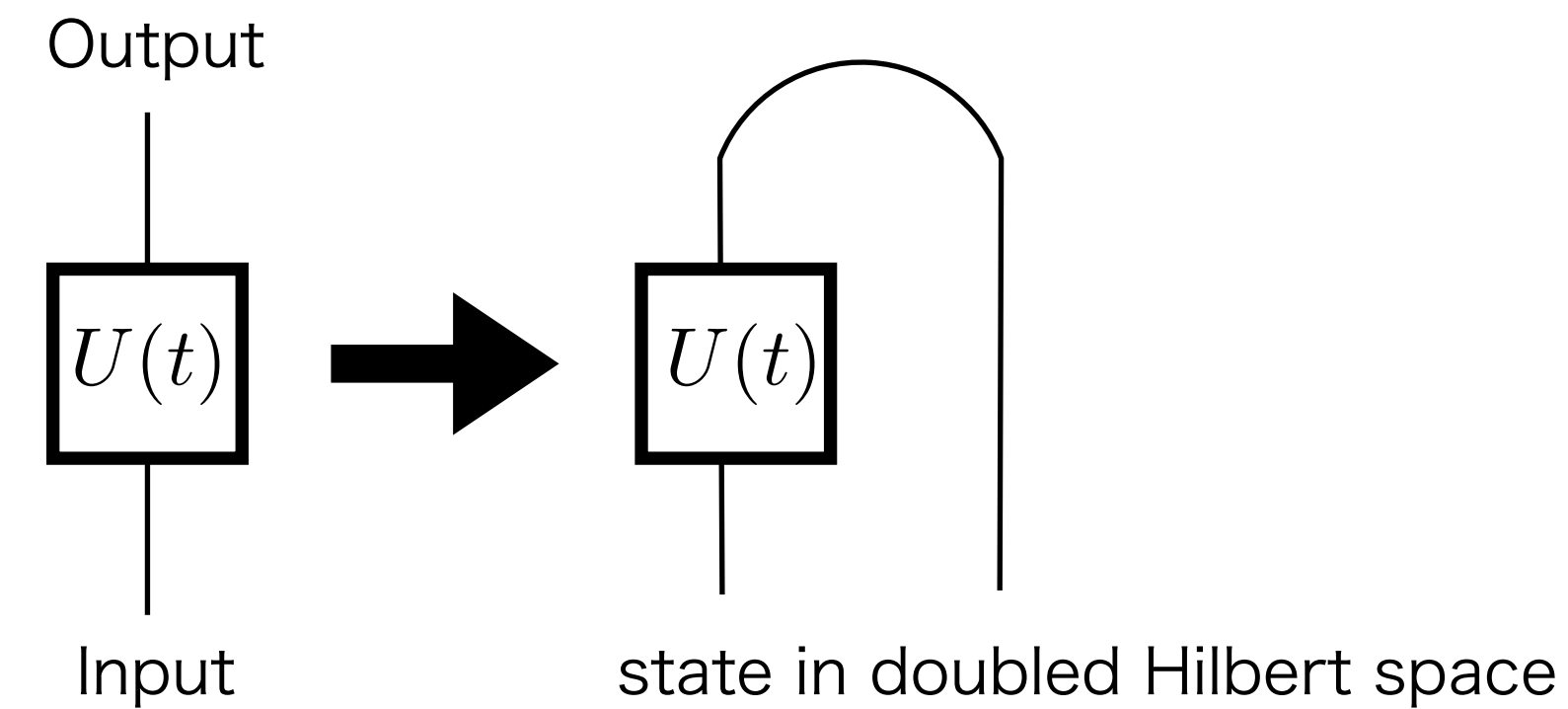
input information remains localized or is spread over many degrees of freedom

→ Mutual information for the operator state (OMI) can characterize it

- Define operator state via channel-state map

$$\rho = |U(t)\rangle\langle U(t)| \quad \text{where} \quad |U(t)\rangle \equiv U(t)_{\mathcal{H}_1} \otimes 1_{\mathcal{H}_2} |\Phi^+\rangle_{\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2}$$

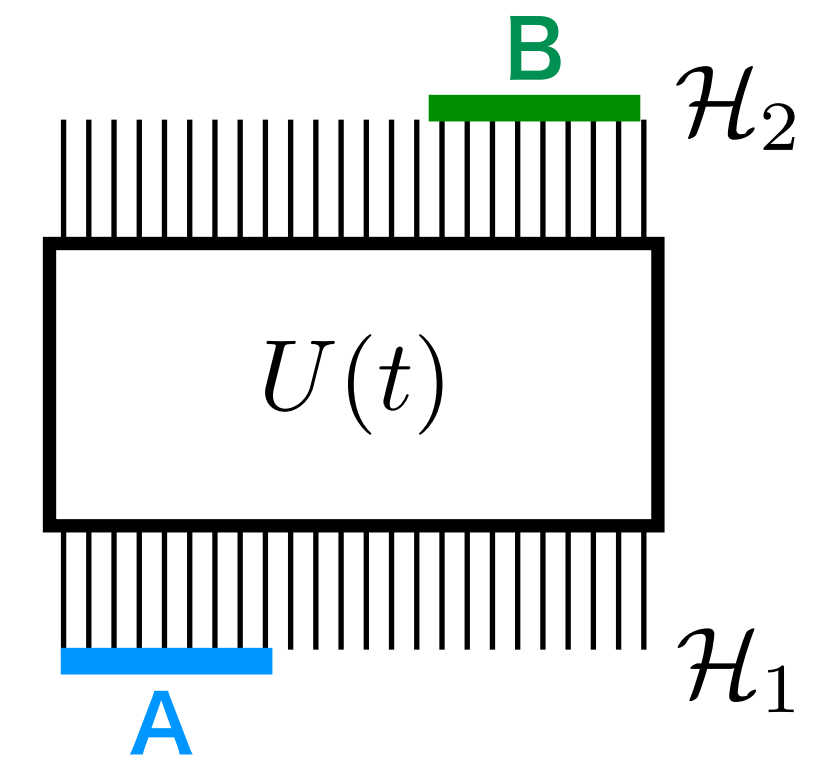
↑
maximally entangled state



- Time-evolution of OMI $I(A : B) \equiv S_A + S_B - S_{A \cup B}$

◆ Holographic CFT (“Chaotic system”) → OMI decays to a constant value

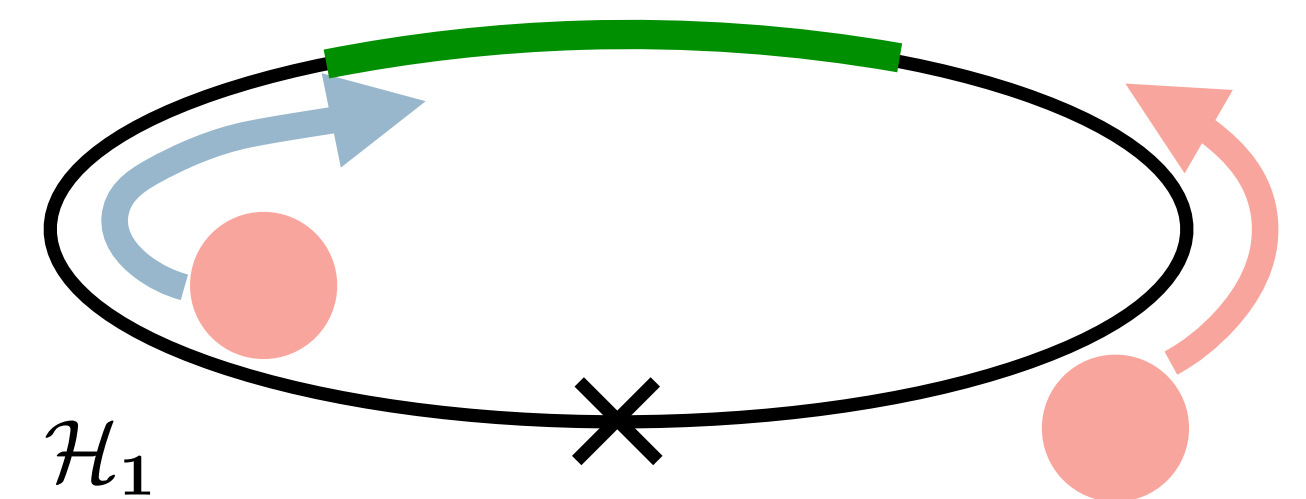
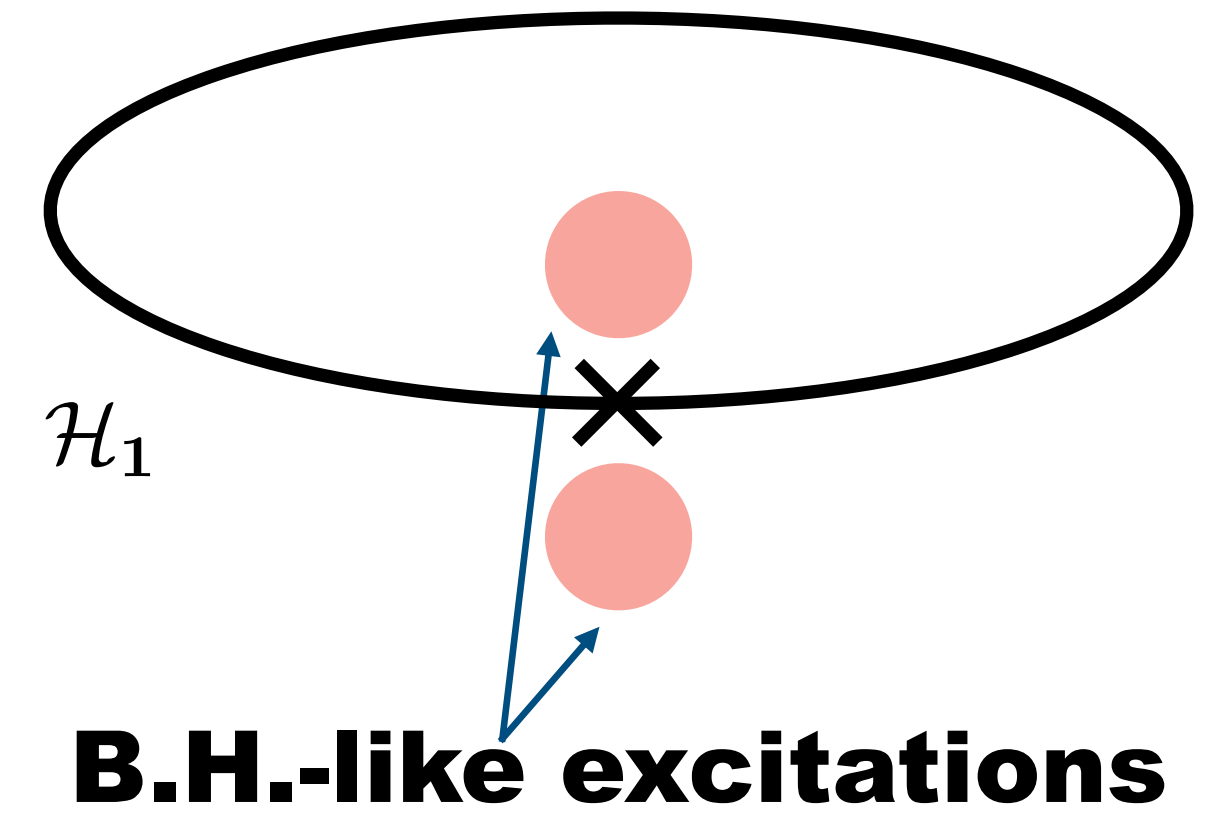
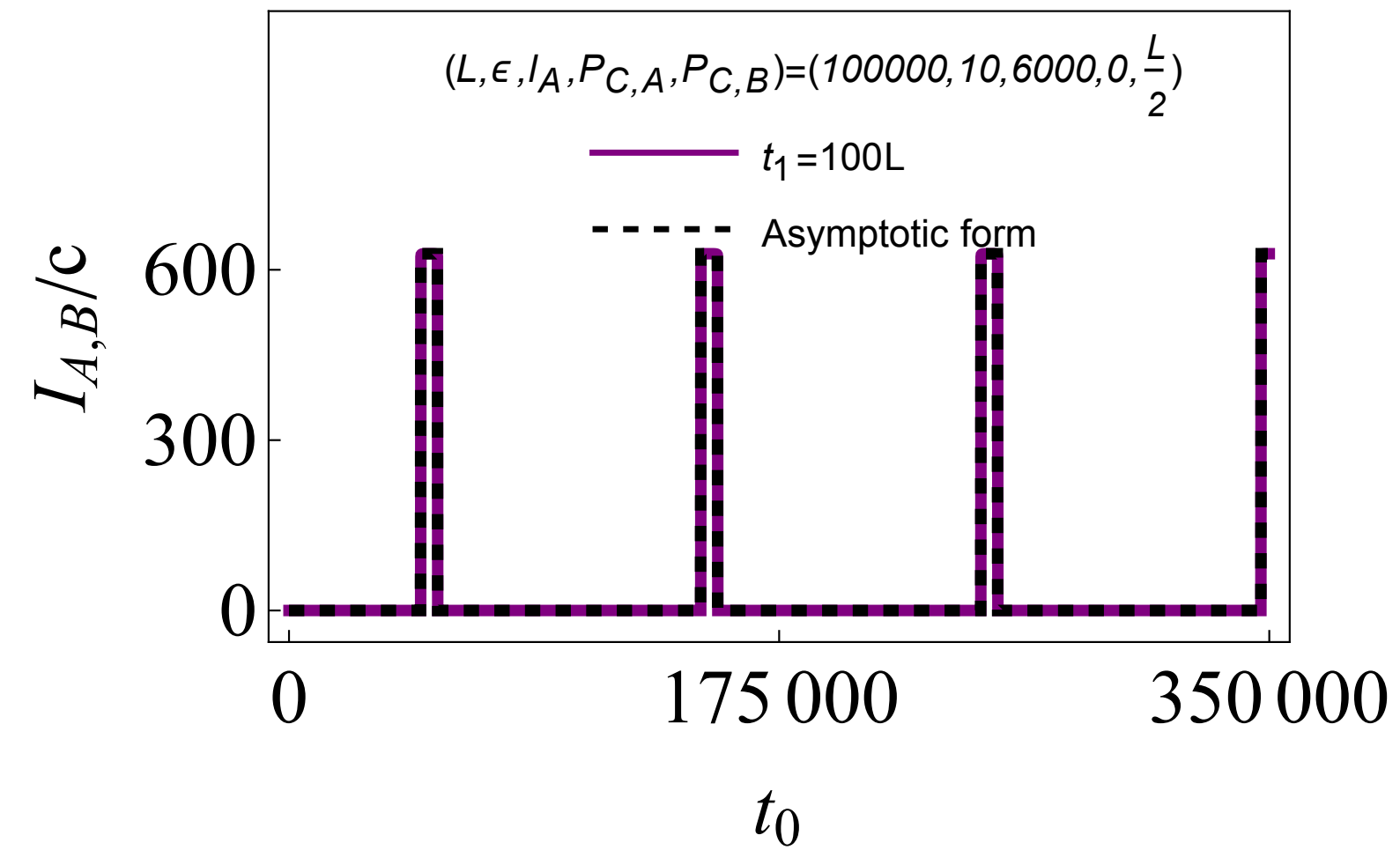
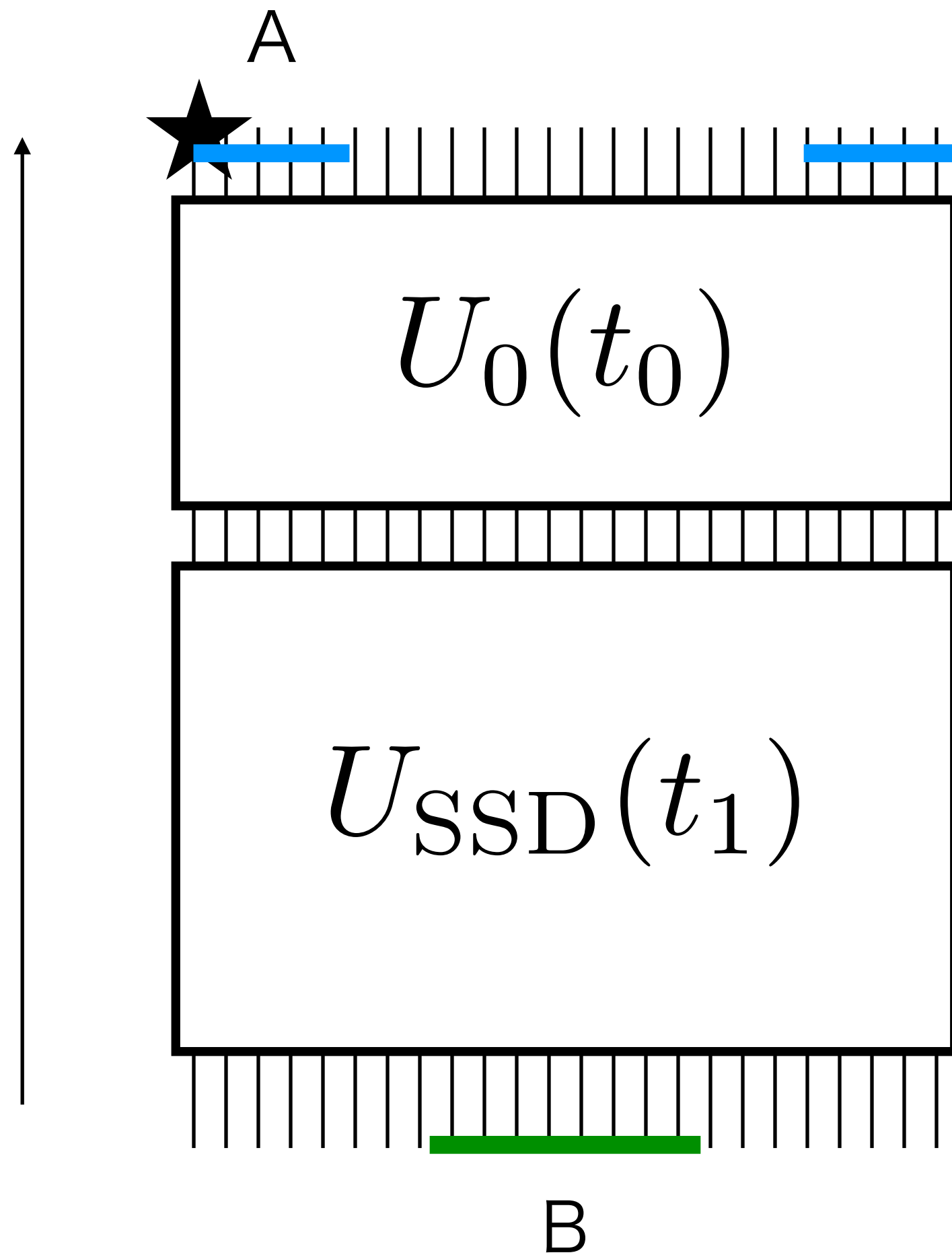
◆ Free CFT (“Integrable system”) → OMI shows a periodic behavior
(So-called quasi-particle picture)



- OMI is also related to out of time-ordered correlators (OTOC)

c.f. Hosur-Qi-Roberts-Yoshida

BH-like excitations behave as “particle”

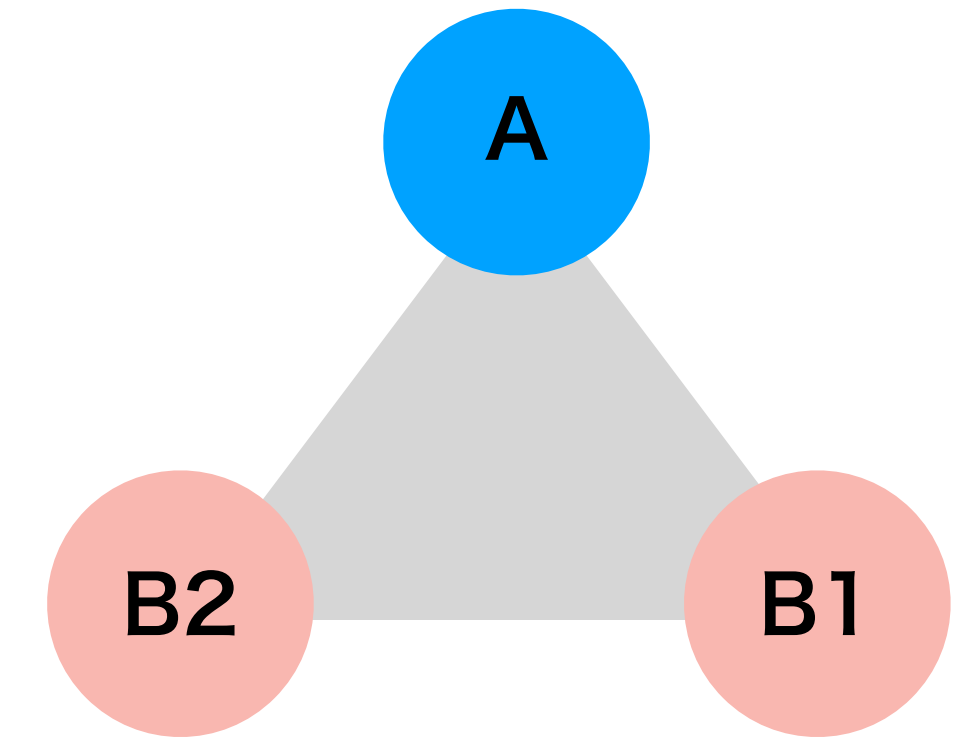


Multi-partite entanglement

At large- t limit,

$$I(A : B_1) = I(A : B_2) = I(B_1 : B_2) = 0$$

But $I(A : B_1 \cup B_2) \neq 0$ (for some time-regime)



● : BH-like excitations

Assumed the symmetric intervals for B1 and B2 (no fixed points)

- Consistent with monogamy of holographic mutual information
- Genuine tripartite entanglement in the sense that any of two parties have vanishing MI

Note:

Different from W-type entanglement in reflected entropy (or entanglement wedge cross sections)